ANNEXES

1ère année

Picchione Serge **2020-2021**

Vous pouvez télécharger ce document au format PDF à l'adresse suivante :

http://www.sismondi.ch/disciplines/mathematiques/espace-perso-profs/serge-picchione

4.1 Liste des symboles

a) Voici une liste de symboles qu'on emploie pour désigner certains objets mathématiques :

$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels			
$\mathbb{Z}$	Ensemble des entiers relatifs			
$\mathbb{Q}$	Ensemble des nombres rationnels			
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels			
$\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$,etc.	Mêmes ensembles mais privés du nombre zéro			
$\mathbb{N}_+$, $\mathbb{Z}_+$,etc.	Mêmes ensembles mais privés des nombres strictement négatif			
$\mathbb{N}_-$, $\mathbb{Z}_-$,etc.	Mêmes ensembles mais privés des nombres strictement positif			
(AB) ou dAB	Droite qui passe par les points A et B			
[AB]	Segment de droite d'extrémités A et B			
[AB)	Demi-droite d'extrémité A et passant par B			
$\overline{\mathrm{AB}}$	Longueur du segment [AB]			
$\widehat{\mathrm{AOB}}$ ou $\sphericalangle \mathrm{AOB}$	Angle de sommet O et de côtés [OA) et [OB)			
ΔABC	Triangle de sommets A, B et C			
$[a\ ;\ b]$	$]a\ ;\ b[$	$[a\ ;\ b[$	$]a\ ;\ b]$	Intervalles bornés
$]a\ ;\ +\infty[$	$[a\ ;\ +\infty[$	$]-\infty\ ;\ a[$	$]-\infty\ ;\ a]$	Intervalles non bornés
$f(x)$	Image de x par la fonction f.			
$(x\ ;\ y)$ ou $\langle x;y\rangle$	Couple formé des nombres x et y dans cet ordre			
$(x\ ;\ y\ ;\ z)$ ou $\langle x;y;z\rangle$	Triplet formé des nombres x, y et z dans cet ordre			
$\lvert x\rvert$	Valeur absolue du nombre x			
∞	Infini			

b) Voici une liste de symboles qui remplacent certaines phrases :

$\forall$	"Pour tout..."
$\exists$	"Il existe..."
$\in$	"...appartient à..." ou "...est *(un)* élément de..."
$\notin$	"...n'appartient pas à..." ou "...n'est pas un élément de..."
$\subset$	"...est inclus dans..." ou "...est un sous-ensemble *(ou une partie)* de..."
$\not\subset$	"... n'est pas inclus dans..." ou "... n'est pas un sous-ensemble de...
$<$	"...est *(strictement)* plus petit *(ou inférieur)* que..."
$\leq$	"...est plus petit *(ou inférieur)* ou égal à..."
$>$	"... est *(strictement)* plus grand *(ou supérieur)* que..."
$\geq$	"... est plus grand *(ou supérieur)* ou égal à..."
$\cong$	"...est environ égal à..." *(pour des nombres)*
$\approx$	"...est semblable à..." *(pour des figures, en particulier des triangles)*
$\Rightarrow$	"...implique..." ou "...entraîne..." ou "Si...alors..."
$\Leftrightarrow$	"...est équivalent à..." ou "...implique ... et réciproquement" ou "...si et seulement si..."
//	"...est parallèle à..."
$\perp$	"...est perpendiculaire à..."

c) L'utilisation de lettres grecques minuscules est courante en mathématiques. En voici la liste :

Minuscule	**Nom**	**Minuscule**	**Nom**
α	alpha	ν	nu
β	bêta	ξ	xi
γ	gamma	o	omicron
δ	delta	π	pi
ε	epsilon	ρ	rhô
ζ	zêta	σ *ou* ς	sigma
η	êta	τ	tau
θ	thêta	υ	upsilon
ι	iota	φ	phi
κ	kappa	χ	khi
λ	lambda	ψ	psi
μ	mu	ω	oméga

4.2. Rappels de calcul numérique

4.2.1 Les ensembles numériques

Définitions

$$\mathbb{N} = \textit{Ensemble des entiers naturels } = \{0;1;2;3;\ ...\}$$
$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1;2;3....\}$$
$$\mathbb{Z} = \textit{Ensemble des entiers relatifs } = \{....;-2;-1;0;1;2;3;....\}$$
$$\mathbb{Q} = \textit{Ensemble des nombres rationnels} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \textit{ et } q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Remarque

$\mathbb{Q}$ peut aussi être considéré comme l'ensemble des nombres dont le **développement décimal** est fini ou illimité mais périodique. Exemple : $\frac{2}{1} = 2$, $\frac{8}{5} = 1.6$, $\frac{7}{9} = 0\bar{7} \in \mathbb{Q}$

Un nombre avec un développement décimal **fini** ou avec un développement décimal **illimité périodique** peut toujours se mettre sous la forme d'une fraction.

Exemples

$\mathbf{1266} = \frac{1266}{1}$

$\mathbf{2,4} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$

$\mathbf{3,245} = \frac{3245}{1000} = \frac{649}{200}$

$\mathbf{3,456565656... = 3,4\overline{56}}$

On pose $a = 3,4\overline{56}$

$$\begin{aligned} 1000 \cdot a &= 3456,565656... \\ -\ 10 \cdot a &= -34,565656... \\ \hline 990 \cdot a &= 3422 \\ \rightarrow\ a &= \frac{3422}{990} = \frac{1711}{495} \end{aligned}$$

On a longtemps cru qu'il n'existait pas d'autres nombres que les rationnels jusqu'au jour où on a **prouvé** que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel ! $\sqrt{2} = 1,4142135623730950488 01$.................

Il a donc fallu considérer de nouveaux nombres, ceux qui ne sont pas rationnels.

Définition

Un **nombre irrationnel** est un nombre qui ne peut pas s'écrire sous forme de fraction, ou un nombre dont le développement décimal est illimité et non périodique.

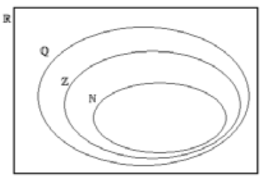
Exemple $\pi = 3,14159265358979323 85......$ est également un nombre irrationnel. (voir table C.R.M.)

Définition

Lorsqu'on considère l'ensemble de tous les nombres : entiers naturels, entiers relatifs, nombres rationnels et irrationnels, on parle de **l'ensemble** $\mathbb{R}$ **des nombres réels.**

Exemples $-2 = -\frac{2}{1}$; $\frac{1}{3} = 0,\bar{3}$; π ; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$ $\in \mathbb{R}$

On a les inclusions suivantes : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



4.2.2 Propriétés des nombres réels

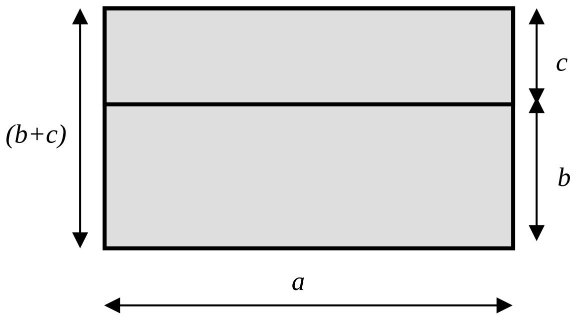
Les nombres réels jouissent des **propriétés** ci-dessous, c'est-à-dire que quelles que soient les valeurs que l'on donne aux lettres a**,** b**,** c et d , les relations suivantes sont toujours vraies :

1) *La somme de deux nombres réels est un nombre réel.*

2) *Le produit de deux nombres réels est un nombre réel.*

3)	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$	*commutativité*
4)	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$	*associativité*
5)	$0+a=a$	$1\cdot a=a$	*élément neutre*
6)	$a+(-a)=0$	$a\cdot\dfrac{1}{a}=1$	*élément symétrique*
7)	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$		*distributivité / mise en évidence*
8)	$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d$		*double distributivité / mise en évidence*
9)	$(-a)\cdot b=a\cdot(-b)=-a\cdot b$	$(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$	*règle des signes*

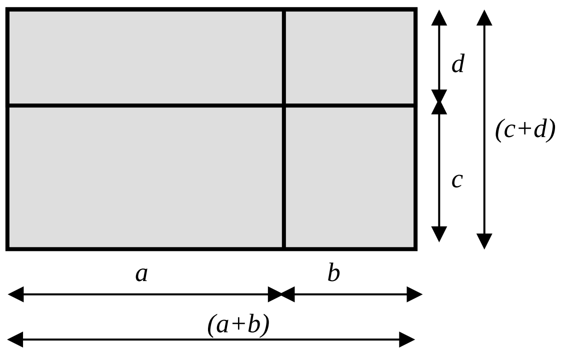
Illustration de la distributivité / mise en évidence



Deux manières de calculer l'aire du rectangle :

$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Illustration de la double distributivité / mise en évidence



Deux manières de calculer l'aire du rectangle :

$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d$

Règle de la multiplication par zéro

10) Lorsque l'on multiplie un nombre réel par *0*, on trouve toujours *0*.
Autrement dit : $\boldsymbol{a\cdot 0=0\cdot a=0}$

11) Dire que le produit de deux nombres réels vaut *0* **est équivalent à** dire que l'un des deux nombres (au moins) est égal à 0. Autrement dit : $\boldsymbol{a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ou } b=0}$

4.2.3 Ordre des opérations

Pour déterminer la valeur d'une expression arithmétique, on décide d'effectuer les différentes opérations en suivant **l'ordre indiqué par les règles** ci-dessous :

> **1)** *Les opérations à l'intérieur d'une paire de parenthèses qui ne contient pas de parenthèse.*
>
> **2)** *Les puissances et les racines.*
>
> **3)** *Les multiplications et les divisions (de gauche à droite).*
>
> **4)** *Les additions et les soustractions (de gauche à droite).*

Exemple $3\cdot 4^2 - 5\cdot(4+2) \underset{\mathbf{1)}}{=} 3\cdot 4^2 - 5\cdot 6 \underset{\mathbf{2)}}{=} 3\cdot 16 - 5\cdot 6 \underset{\mathbf{3)}}{=} 48 - 30 \underset{\mathbf{4)}}{=} 18$

4.2.4 Opérations sur les fractions

Définition

Deux fractions sont égales **si et seulement si** le produit du numérateur de la première fraction par le dénominateur de la deuxième est égal au produit du dénominateur de la première fraction par le numérateur de la deuxième (produit en croix).

Autrement dit :

> Pour tout $a, c \in \mathbb{Z}$ et $b, d \in \mathbb{Z}^*$: $\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a\cdot d = b\cdot c}$

Exemple $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$ car $4\cdot 9 = 6\cdot 6$

Remarque On dit aussi que $\frac{4}{6}$ *est proportionnelle à* $\frac{6}{9}$.

Les **4 opérations sur les fractions** sont :

Pour tout $a, c \in \mathbb{Z}$ et $b, d \in \mathbb{Z}^*$:		Exemples :
addition	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d + b\cdot c}{b\cdot d}$	$\frac{5}{3} + \frac{4}{7} = \frac{35+12}{21} = \frac{47}{21}$
soustraction	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d - b\cdot c}{b\cdot d}$	$\frac{5}{3} - \frac{4}{7} = \frac{35-12}{21} = \frac{23}{21}$
multiplication	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}$	$\frac{5}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5\cdot 4}{3\cdot 7} = \frac{20}{21}$
division	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d}{b\cdot c}$	$\frac{5}{3} \div \frac{4}{7} = \frac{5\cdot 7}{3\cdot 4} = \frac{35}{12}$

4.2.5 Puissances entières

Définition (Puissances à exposants dans $\mathbb{N}^*$)

Si $\boldsymbol{a}$ est un nombre réel $\in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{n}$ un entier naturel non nul $\in \mathbb{N}^*$, alors on définit:

$$\boldsymbol{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ...... \cdot a}_{n \ facteurs}} \qquad \text{(produit de } n \text{ facteurs de } a\text{)}$$

Exemples $\quad 3^4 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4\ facteurs} \qquad \left(\frac{7}{2}\right)^3 = \underbrace{\frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2}}_{3\ facteurs}$

Voyez la ressemblance avec : $\boldsymbol{n \cdot a = \underbrace{a + a + ... + a}_{n\ fois}}$ (somme de n termes de a), mais sans confondre !

Par exemple : $3 \cdot 4 = \underbrace{4 + 4 + 4}_{3\ fois}$

Définition / convention (Puissances à exposants dans $\mathbb{Z}$)

Si $a \neq 0$, alors $\boldsymbol{a^0 = 1}$ (0^0 n'est pas défini)

Si $\boldsymbol{a}$ est un nombre réel non nul $\in \mathbb{R}^*$ et $\boldsymbol{n}$ un entier naturel non nul $\in \mathbb{N}^*$,

alors $\qquad \boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{n\ facteurs}}}$

Exemples $\quad 5^0 = 1 \qquad 7^0 = 1 \qquad 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4\ facteurs}} \qquad \left(\frac{7}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{7}{2}\right)^3} = \frac{1}{\underbrace{\frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2}}_{3\ facteurs}}$

Propriétés des puissances entières

Quels que soient les nombres réels $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ non nuls $\in \mathbb{R}^*$ et les entiers relatifs $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}$, on a:

	Exemples :
1) $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$	$\left(2^3\right)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$
2) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$
3) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$
4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$
5) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{2^4}{2^3} = 2^{4-3} = 2^1$

Remarque En général : $(a+b)^n \neq a^n + b^n$

4.2.6 Notation scientifique

Rappels sur les puissances de 10

$.....10^{-3}=0{,}001\ ;\ 10^{-2}=0{,}01\ ;\ 10^{-1}=0{,}1\ ;\ 10^{0}=1\ ;\ 10^{1}=10\ ;\ 10^{2}=100\ ;\ 10^{3}=1000.....$

La notation scientifique

Tout nombre réel ***a*** positif ($\in\mathbb{R}_+^*$) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$a=c\cdot 10^{n}\qquad avec\quad 1\le c<10\quad et\quad n\in\mathbb{Z}$$

Exemples

$0{,}00008784=\mathbf{8{,}784\cdot 10^{-5}}$ avec $1\le c=\mathbf{8{,}784}<10$ et $n=-5\in\mathbb{Z}$

$25000=\mathbf{2{,}5\cdot 10^{4}}$ avec $1\le c=\mathbf{2{,}5}<10$ et $n=4\in\mathbb{Z}$

Remarques

L'écriture scientifique, est une écriture compacte et donne un ordre de grandeur aux quantités.
Elle est donc particulièrement utile lorsqu'il s'agit d'écrire de très grands nombres ou de très petits nombres. Elle est aussi présente sur les calculatrices.

Illustrations

- La distance de la Terre à la Saturne est d'environ *1'270'000'000 Km*, elle peut aussi s'écrire en notation scientifique : $1{,}27\cdot 10^{9}\ Km$.
- La masse d'un atome d'oxygène est de *0,000 000 000 000 000 000 000 026 grammes*, ce qui s'écrit en notation scientifique : $2{,}6\cdot 10^{-23}\ grammes$.

4.2.7 Racines carrées

Définition

Si $\boldsymbol{a}$ est un nombre réel positif ou nul ($\in \mathbb{R}_+$), alors on définit:
la **racine carrée de *a*** que l'on note $\sqrt{\boldsymbol{a}}$, comme le nombre réel **positif** dont le carré est égal à $\boldsymbol{a}$, autrement dit :

$\sqrt{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}^2$ (*a* et *b* des nombres réels positifs)

Exemples

$\sqrt{4} = 2 \Leftrightarrow 4 = 2^2$
La racine carrée de 4 vaut 2.

$\sqrt{9} = 3 \Leftrightarrow 9 = 3^2$
La racine carrée de 9 vaut 3.

Remarques

1) *Le symbole* $\sqrt{\ }$ *s'appelle radical.*
L'expression sous ce symbole s'appelle le radicande.
2) *Insistons sur le fait qu'une racine carrée est par définition un nombre réel positif .*
3) *La racine carrée d'un nombre réel négatif n'est pas définit dans les réels .* $\left(\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}\right)$

Propriétés de la racine carrée

1) *Avec* $a \in \mathbb{R}_+$: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$
2) *Avec* $a \in \mathbb{R}$: $\sqrt{a^2} = \|a\|$ **valeur absolue de a** *et* $\|a\| = \begin{cases} a & si\ a \geq 0 \\ -a & si\ a<0 \end{cases}$

Exemples **1)** $\left(\sqrt{4}\right)^2 = 4$ **2)** $\sqrt{(-4)^2} = \|-4\| = 4$

Propriétés de la racine carrée (suite)

Avec $a,b \in \mathbb{R}_+^*$:	*Exemples :*
3) $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$
4) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ *pour* $b \neq 0$	$\sqrt{\frac{16}{4}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}}$
5) $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$	$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$
6) $\left(\sqrt{a}\right)^n = \sqrt{a^n}$ $n \in \mathbb{Z}$	$\left(\sqrt{2}\right)^4 = \sqrt{2^4}$

Remarque *En général :* $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Notes personnelles

Notes personnelles