ALGÈBRE

2ème année

Picchione Serge

2020-2021

AVANT-PROPOS

- Ce document a été conçu pour *l'enseignement des mathématiques* dispensé au *Collège de Genève* en *deuxième année*, en **algèbre**. Cela dit, il peut servir de support de cours pour d'autres filières d'enseignement.

- Vous trouverez dans ce chapitre de la **théorie** (définitions, théorèmes, démonstrations, etc.) et des **exercices** qui vous permettront progressivement de vous familiariser et de maîtriser les diverses notations et concepts mathématiques. À la fin du chapitre se trouvent les **solutions des exercices.**

- Les exercices accompagnés d'un **astérisque (*)**, sont des exercices supplémentaires de développement destinés, par exemple, aux élèves ayant choisi l'option, **niveau avancé (MA2).**

- Pour mieux **repérer les points importants** de la théorie, *les définitions sont dans un encadré blanc* et *les théorèmes dans un encadré grisé.*

- Pour **vérifier votre niveau de compréhension** à la fin de l'étude d'un sous chapitre, vous pouvez vous référer à la section : « Ce qu'il faut absolument savoir ».

- Vous pouvez **télécharger** ce document au format PDF à l'adresse suivante :

http://www.sismondi.ch/disciplines/mathematiques/espace-perso-profs/serge-picchione

- Pour finir, **un grand merci** aux collègues de **divers établissements scolaires** qui ont **partagé leurs cours :** Nicolas Chabal, Yves Drevous, Bernard Gisin, Alain Klopfenstein, Maurizio Lalicata, Bernard Lenggenhager, Romanita Nagy Gauxachs, Adrien Schleining et Serge Zoutter.

BON TRAVAIL !

Picchione Serge **2020-2021**

1.1 Polynômes

1.1.1 Définitions

Définition

Un **monôme** (à une variable) est le produit d'un nombre réel donné et d'une variable réelle élevée à une certaine puissance entière positive ou nulle.

Exemples $3x^4$ $-x^2$ ay^3 $7x^1$ $-4x^0$

Remarques **a)** 3 est le **coefficient**, x est la **variable** et 4 est l'**exposant** du monôme $3x^4$ **.**

b) On note : $1 \cdot x = x$, $(-1) \cdot x = -x$, $x^0 = 1$ et $x^1 = x$

Définition

Un **polynôme** (à une variable) est une somme de monômes (à une variable).

Autrement dit, on appelle **polynôme** (à une variable) une expression de la forme :
$\boldsymbol{P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0}$ avec c_0 , c_1 , ... , $c_n \in \mathbb{R}$ et $c_n \neq 0$. $n \in \mathbb{N}$

Exemples

a) $P(x) = 7x^6 + 5x^4 - 9x^3 + 5x + 1$ est un polynôme en x composé de 5 monômes.
$deg(P)=6$ *Coefficients :* $c_6 = 7$; $c_5 = 0$; $c_4 = 5$; $c_3 = -9$; $c_2 = 0$; $c_1 = 5$; $c_0 = 1$

b) $Q(x) = -6x^3 + \sqrt{2}x + 1$ est un polynôme en x composé de 3 monômes.
$deg(Q)=3$ *Coefficients :* $c_3 = -6$; $c_2 = 0$; $c_1 = \sqrt{2}$; $c_0 = 1$

c) $P(x) = 2$ est un polynôme de degré 0 car $2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot x^0$; on l'appelle aussi polynôme constant.

d) Écriture en base 10 : $(342)_{10} = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$
Cette expression est un polynôme de degré 2 avec $x = 10$ et $c_2 = 3$; $c_1 = 4$; $c_0 = 2$.

Définition

Le **degré n** du polynôme, c'est la plus grande puissance de la variable qu'il contient.
Notation : $deg(P) = n$.

Remarques

a) Un polynôme ne possède pas de variable à l'exposant :
$P(x) = 2^x + 3x$ n'est pas un polynôme car 2^x n'est pas un monôme.
$P(x) = x^2 + 3x$ est un polynôme $deg(P) = 2$ et ses coefficients sont : $c_2 = 1$, $c_1 = 3$, $c_0 = 0$.

b) Un polynôme ne possède pas de variable sous une racine :
$P(x) = \sqrt{5x} + 2$ n'est pas un polynôme car $\sqrt{5x} = \sqrt{5}\sqrt{x} = \sqrt{5}x^{\frac{1}{2}}$ n'est pas un monôme.
$P(x) = \sqrt{5}x + 2$ est un polynôme $deg(P) = 1$ et ses coefficients sont : $c_1 = \sqrt{5}$, $c_0 = 2$.

c) Un polynôme ne possède pas de division par la variable :

$P(x) = \dfrac{3}{x} + 6$ n'est pas un polynôme car $\dfrac{3}{x} = 3\dfrac{1}{x} = 3x^{-1}$ n'est pas un monôme.

$P(x) = \dfrac{x}{3} + 6$ est un polynôme $deg(P) = 1$ et ses coefficients sont : $c_1 = \dfrac{1}{3}$, $c_0 = 6$.

Convention

On écrit toujours les termes d'un polynôme (monômes) de telle sorte que les puissances soient présentées dans l'ordre décroissant.

Exemple $P(x) = 5x^2 + 6x + 2$ est la forme ordonnée et non pas : $P(x) = 6x + 5x^2 + 2$.

1.1.2 Opérations entre polynômes

Exemples

$A(x) = 7x^3 + 3x^2 - 2x + 4 \qquad B(x) = 3x^4 + 2x^3 - 2x + 1$

• **Somme** de deux polynômes : (addition)

$$A(x) + B(x) = \left(7x^3 + 3x^2 - 2x + 4\right) + \left(3x^4 + 2x^3 - 2x + 1\right) = 3x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 4x + 5$$

De manière générale : $deg\left(A + B\right) \leq max\left[deg\left(A\right); deg\left(B\right)\right]$

• **Différence** de deux polynômes : (soustraction)

$$A(x) - B(x) = \left(7x^3 + 3x^2 - 2x + 4\right) - \left(3x^4 + 2x^3 - 2x + 1\right) = -3x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 3$$

De manière générale : $deg\left(A - B\right) \leq max\left[deg\left(A\right); deg\left(B\right)\right]$

• **Produit** d'un polynôme par un nombre réel : (multiplication par un scalaire)

$$Si\ \ k = -2 \quad alors \quad k \cdot A(x) = \left(-2\right) \cdot \left(7x^3 + 3x^2 - 2x + 4\right) = -14x^3 - 6x^2 + 4x - 8$$

De manière générale : $Si\ \ k \neq 0\ \ alors\ \ deg\left(k \cdot A\right) \ = \ deg\left(A\right)$

• **Produit** de deux polynômes : (multiplication)

$$A(x) \cdot B(x) = \left(7x^3 + 3x^2 - 2x + 4\right) \cdot \left(3x^4 + 2x^3 - 2x + 1\right) = 21x^7 + 23x^6 - 6x^4 + 9x^3 + 7x^2 - 10x + 4$$

De manière générale : $deg\left(A \cdot B\right) = deg\left(A\right) + deg\left(B\right)$

Remarques

a) Si on veut obtenir uniquement ***le coefficient du terme de degré 3*** du polynôme $A(x) \cdot B(x)$ on écrit :

$$A(x) \cdot B(x) = \left(\underline{7x^3} + \underline{3x^2} - 2x + \underline{4}\right) \cdot \left(3x^4 + \underline{2x^3} - \underline{2x} + \underline{1}\right) = \ldots\ldots + 7x^3 \cdot 1 + 3x^2 \cdot \left(-2x\right) + 4 \cdot 2x^3 \pm \ldots\ldots =$$

$$= \ldots\ldots + 7x^3 - 6x^3 + 8x^3 \ldots\ldots = \ldots\ldots + \boxed{\mathbf{9}}x^3 \pm \ldots\ldots$$

b) Lorsqu'on additionne, soustrait ou multiplie deux **polynômes** le résultat est un **polynôme**. C'est aussi le cas lorsqu'on multiplie un polynôme par un nombre réel.

c) Deux polynômes sont **égaux** s'ils ont le même degré et les mêmes coefficients.

Exemples : a) $P(x)=x^2+3x+2$ et $S(x)=x^2+\frac{6}{2}x+2$ sont égaux.

b) $P(x)=x^2+3x+2$ et $S(x)=x^3+3x+2$ ne sont pas égaux.

Proposition

Soient trois polynômes $A(x), B(x)$ *et* $C(x)$. On a :

1) $A(x)+B(x)=B(x)+A(x)$ *Commutativité de l'addition.*

2) $\left[A(x)+B(x)\right]+C(x)=A(x)+\left[B(x)+C(x)\right]$ *Associativité de l'addition.*

3) $A(x)+O(x)=A(x)$ avec $O(x)=0$ *Elément neutre pour l'addition.*

4) $A(x)+(-A)(x)=O(x)$ avec $(-A)(x)=(-1)\cdot A(x)$ *Opposé pour l'addition.*

5) $A(x)\cdot B(x)=B(x)\cdot A(x)$ *Commutativité de la multiplication.*

6) $\left[A(x)\cdot B(x)\right]\cdot C(x)=A(x)\cdot\left[B(x)\cdot C(x)\right]$ *Associativité de la multiplication.*

7) $A(x)\cdot I(x)=A(x)$ avec $I(x)=1$ *Elément neutre pour la multiplication.*

8) $A(x)\cdot\left[B(x)+C(x)\right]=A(x)\cdot B(x)+A(x)\cdot C(x)$ *Multiplication distributive sur l'addition.*

La démonstration de cette proposition, sort du cadre de ce cours et ne sera donc pas exposée ici.

Exercice 1

Effectuer les opérations entre les polynômes et donner les coefficients et le degré des polynômes.

1) $(x^2+1)(5-2x)+2x^3$ **2)** $(4t+1)^2+(4t-1)^2$ **3)** $(4x+1)^2-(4x-1)^2$

4) $(x+1)^3-x(x+1)^2-2x^2$ **5)** $(x+1)(x^2-1)-x(1-x)^2$ **6)** $(x-a)^2+(x+a)^2$

7) $(x-a)^3$ **8)** $(x+a)^3$ **9)** $(x+b)^3-(x-b)^3$

Exercice 2

Déterminer, pour chacun des polynômes ci-dessous, le degré et le coefficient de plus haut degré.

Exemple : $P(x)=(-2x^3+x)(3x^7+4x-6)+(x^{10}+2x)=(-2x^3)\cdot(3x^7)+x^{10}\pm......=-5x^{10}\pm......$

donc $deg(P)=10$ *et* $c_{10}=-5$

1) $P(x)=(x^2+1)(3-x)$ **2)** $P(x)=(x+1)^3-8x^2+7x$

3) $P(x)=(x^4-2x^2)(x^6-3x)-x^{10}$ **4)** $P(t)=(t+1)(t^2-1)+t(1-t^2)+2t^2$

5) $P(u)=(u^5-2)^2-(u^5+2)^2$ **6)** $P(x)=(2x-3)(x-4)\left(-\frac{1}{2}x+5\right)(7x+8)$

7) $P(x)=(2x-3)^2(x-4)^3(x^2+1)$ **8)** $P(x)=\left((5x-3)(2x-4)(x^2+1)\right)^2$

Exercice 3

On considère les polynômes suivants :

$A(x)=-x^4+x^3+3x^2+x$, $B(x)=x^4-x^2+2$, $C(x)=2x^2+x-3$ *et* $D(x)=(x+1)^3$

Déterminer :

1) le développement du polynôme $E(x)=3\cdot A(x)-2\cdot B(x)+C(x)$.

2) le développement du polynôme $F(x)=A(x)\cdot C(x)$.

3) sans tout calculer, le coefficient du monôme x^3 du polynôme $A(x)\cdot B(x)$.

4) le degré du polynôme $C(x)\cdot\left[A(x)+B(x)\right]$.

5) le degré du polynôme $G(x)=\left[A(x)\right]^5$.

6) sans tout calculer, le coefficient du monôme x^4 du polynôme $H(x)=3x^2\cdot A(x)$.

7) le degré du polynôme $A(x)+B(x)+C(x)$.

8) le degré du polynôme $A(x)\cdot B(x)\cdot C(x)\cdot D(x)$.

9) le développement du polynôme $J(x)=x^2\cdot D(x)$.

10) le degré du polynôme $K(x)=6\cdot B(x)$.

11) deux polynômes $S(x)$ et $T(x)$ tel que $S(x)\cdot T(x)$ est de degré *10* et celui de $S(x)+T(x)$ est degré *3*.

12) deux polynômes $U(x)$ et $V(x)$ tel que $U(x)\cdot V(x)$ est de degré *11*, celui de $U(x)+V(x)$ est degré *15*.

13) deux polynômes $M(x)$ et $N(x)$ qui sont de degré *3* et leur somme est un polynôme de degré *0*.

14) si $P(x)=\sqrt{3x}+x+1$ est un polynôme.

15) si $Q(x)=\dfrac{3x^7+5x-4}{x}$ est un polynôme.

16) si $R(x)=1000$ est un polynôme.

Exercice 4

Considérons les polynômes : $A(t)=\dfrac{1}{3}t^4-8t^2+\dfrac{7}{9}t-5$ $\quad B(t)=\dfrac{12}{7}t^5+5t^3+2$

$C(t)=3t^2-\dfrac{1}{4}t+1$ $\quad D(t)=-t^2-\dfrac{1}{2}$

Simplifier **et** calculer :

1) $A(t)\cdot\left[\left(A(t)-B(t)\right)+\left(B(t)-A(t)\right)\right]+4\cdot C(t)$

2) $4\cdot\left(\left[A(t)-C(t)-A(t)\right]+\left[B(t)-D(t)-B(t)\right]\right)$

3) $\left[A(t)-C(t)\right]-\left[A(t)-C(t)+D(t)-B(t)\right]+D(t)$

4) $\left[C(t)+D(t)\right]^2-C(t)^2-D(t)^2$

5) $D(t)\left[1+D(t)\left[1+D(t)\right]\right]+D(t)-D(t)^2-D(t)^3$

1.1.3 Division euclidienne *(Euclide, III^e siècle av. J.-C.)*

Divison euclidienne entre deux nombres entiers

Exemples

a) Diviser le nombre entier $\boldsymbol{a = 27}$ par le nombre entier $\boldsymbol{b = 4}$, revient à déterminer deux nombres entiers : un **quotient *q*** et un **reste *r*** .

$$\begin{array}{r|l} 27 & 4 \\ \underline{-24} & 6 \\ 3 & \end{array} \qquad \text{donc} \qquad \underbrace{27}_{a} = \underbrace{4}_{b} \cdot \underbrace{6}_{q} + \underbrace{3}_{r} \quad avec \;\; 0 \leq \underbrace{3}_{r} < \underbrace{4}_{b}$$

b) Diviser le nombre entier $\boldsymbol{a = 28}$ par le nombre entier $\boldsymbol{b = 4}$, revient à déterminer deux nombres entiers : un **quotient *q*** et un **reste *r*** .

$$\begin{array}{r|l} 28 & 4 \\ \underline{-24} & 7 \\ 0 & \end{array} \qquad \text{donc} \qquad \underbrace{28}_{a} = \underbrace{4}_{b} \cdot \underbrace{7}_{q} + \underbrace{0}_{r} \quad avec \;\; 0 \leq \underbrace{0}_{r} < \underbrace{4}_{b}$$

Remarques :

4 est un **diviseur** de 28, ou 28 est **divisible** par 4 .

Si le reste de la division euclidienne vaut 0 alors on a **factorisé** (partiellement) le nombre $a = 28 \quad car \quad 28 = 4 \cdot 7$

La **division euclidienne** se généralise à tout couple de nombres entier naturel comme suit :

Proposition **(division euclidienne sur les nombres entiers)**

Soients deux nombres entiers naturels a et b $(b \neq 0)$.
Il existe deux nombres entiers q et r tel que $\boldsymbol{a = b \cdot q + r \quad et \quad 0 \leq r < b}$

Le quotient q et le reste r de la division euclidienne sont uniques.

La démonstration de cette proposition, sort du cadre de ce cours et ne sera donc pas exposée ici.

Un peu d'histoire

Euclide (III^e siècle av. J.-C.) est un mathématicien de la Grèce antique. Son ouvrage le plus célèbre, *les Éléments*, est un des plus anciens traités connus présentant de manière systématique, à partir d'axiomes et de postulats, un large ensemble de théorèmes accompagnés de leurs démonstrations. Il porte sur la géométrie, tant plane que solide, et l'arithmétique théorique. L'ouvrage a connu des centaines d'éditions en toutes langues et ses thèmes restent à la base de l'enseignement des mathématiques au niveau secondaire dans de nombreux pays.

Divison euclidienne entre deux polynômes

Exemples

a) Diviser le polynôme $\boldsymbol{A(x)=x^2-4}$ par le polynôme $\boldsymbol{B(x)=x+1}$, revient à déterminer deux polynômes : un **quotient** $\boldsymbol{Q(x)}$ et un **reste** $\boldsymbol{R(x)}$.

$$\begin{array}{r|l} x^2-4 & x+1 \\ \cline{2-2} -\left(x^2+x\right) & x-1 \\ \hline -x-4 & \\ -\left(-x-1\right) & \\ \hline -3 & \end{array}$$

donc $\underbrace{x^2-4}_{A(x)}=\underbrace{\left(x+1\right)}_{B(x)}\cdot\underbrace{\left(x-1\right)}_{Q(x)}\underbrace{-3}_{R(x)}$ *avec* $0\le deg\left(R\right)<deg\left(B\right)$

b) Diviser le polynôme $\boldsymbol{A(x)=x^2-4}$ par le polynôme $\boldsymbol{B(x)=x+1}$, revient à déterminer deux polynômes : un **quotient** $\boldsymbol{Q(x)}$ et un **reste** $\boldsymbol{R(x)}$.

$$\begin{array}{r|l} x^3+4x^2+5x+2 & x+2 \\ \cline{2-2} -\left(x^3+2x^2\right) & x^2+2x+1 \\ \hline 2x^2+5x+2 & \\ -\left(2x^2+4x\right) & \\ \hline x+2 & \\ -\left(x+2\right) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

donc $\underbrace{x^3+4x^2+5x+2}_{A(x)}=\underbrace{\left(x+2\right)}_{B(x)}\cdot\underbrace{\left(x^2+2x+1\right)}_{Q(x)\text{ est le quotient}}+\underbrace{0}_{R(x)\text{ est le reste}}$

avec $0\le deg\left(R\right)<deg\left(B\right)$

Remarques :

Le polynôme $x+2$ est un **diviseur** du polynôme x^3+4x^2+5x+2 .

Le polynôme x^3+4x^2+5x+2 est **divisible** par le polynôme $x+2$.

Si le reste de la division euclidienne vaut *0* alors on a **factorisé** (partiellement) le polynôme $A\left(x\right)=x^3+4x^2+5x+2$ car $x^3+4x^2+5x+2=\left(x+2\right)\cdot\left(x^2+2x+1\right)$

La **division euclidienne** se généralise à tout couple de polynômes comme suit :

Proposition **(division euclidienne sur les polynômes)**

Soients deux polynômes $A(x)$ et $B(x)\neq 0$.
Il existe deux polynômes $Q(x)$ et $R(x)$ tel que :
$\boldsymbol{A(x)=B(x)\cdot Q(x)+R(x)}$ ***et*** $\boldsymbol{0\le deg(R)<deg(B)}$
Le quotient $Q(x)$ et le reste $R(x)$ de la division euclidienne sont uniques.

La démonstration de cette proposition, sort du cadre de ce cours et ne sera donc pas exposée ici.

Exercice 5

a) Effectuer la division euclidienne des polynômes *A(x)* par *B(x)* et déterminer les polynômes *Q(x)* et *R(x)*.

b) Vérifier que $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x) \quad et \quad 0 \le deg(R) < deg(B)$

1) $A(x) = 2x^3 + x + 2$	$B(x) = x^2 + x - 1$
2) $A(x) = x^3 - 10x^2 + 25x$	$B(x) = x - 5$
3) $A(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$	$B(x) = x^2 + 1$
4) $A(x) = x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 8x + 15$	$B(x) = x - 5$
5) $A(x) = x^3 - a^3$	$B(x) = x - a$
6) $A(x) = x^3 + a^3$	$B(x) = x + a$

c) Dans quel cas, le polynôme *A(x)* est-il divisible par le polynôme *B(x)* ?

d) Dans quel cas, le polynôme *A(x)* a-t-il été (partiellement) factorisé ?

e) Que peut-on dire du degré de *R(x)* par rapport au degré de *B(x)* ?

Exercice 6

1) Déterminer le polynôme $P(x)$ dont la division par $x^2 + 3$ donne comme quotient $5x^3 - x + 1$ et comme reste $2x - 3$.

2) Le polynôme $x^2 + x - 7$ est-il un diviseur du polynôme $2x^3 + 3x^2 - 13x - 7$? Justifier.

Exercice 7 *

a) Effectuer la division euclidienne des polynômes $A(x)$ par le polynôme $B(x) = x - 1$ si :

1) $A(x) = x^2 - 1$	**2)** $A(x) = x^3 - 1$
3) $A(x) = x^4 - 1$	**4)** $A(x) = x^n - 1 \quad n \in \mathbb{N}^*$.

b) Déduire à l'aide des résultats précédents une formule pour la somme : $1 + x + x^2 + x^3 + \ \dots \ + x^n$.

c) Calculez, à l'aide des résultats précédents la somme $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{50}$.

d) Calculez, à l'aide des résultats précédents la somme $1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{40}$.

e) Le jeu d'échecs se joue sur un échiquier de *64* cases.

La légende dit que pour le remercier des plaisirs que lui procurait le jeu d'échecs, l'empereur *Shiram* promit à son inventeur *Sissa* le cadeau suivant :

« Sur la première case du jeu, il déposerait 1 grain de riz, puis le double sur la deuxième case et ainsi de suite en doublant chaque fois le nombre de grains. »

Un grain de riz pèse environ *0,06 g*.

Déterminer un ordre de grandeur de masse de riz correspondant au nombre de grains sur l'échiquier (donner le résultat en grammes puis en tonnes).
De nos jours la production annuelle mondiale de riz est environ de $600 \cdot 10^6$ tonnes.

Que faut-il penser de la promesse du roi *Shiram* ?

1.1.4 Le schéma de Horner

Le ***schéma de Horner*** est une façon de disposer les calculs de façon à rendre plus facile l'obtention du quotient et du reste de la division polynomiale par un polynôme du type $\left(\boldsymbol{x-c}\right)$.

Exemple Soit le polynôme $P(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$ à diviser par $x + 2 = x - (\boldsymbol{-2})$

Degré des coefficients de *P*	3	2	1	0	
Coefficients de *P*	1	4	5	2	+
$\boldsymbol{c = -2}$	0	-2	-4	-2	
	1	2	1	0	=
	b_2	b_1	b_0	R	

Le quotient est $Q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0 = x^2 + 2x + 1$ et le reste est $R(x) = 0$.

$$\underbrace{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}_{P(x)} = (x+2) \cdot \underbrace{\left(x^2 + 2x + 1\right)}_{Q(x)} + \underbrace{0}_{R(x)}$$

Explication du schéma de Horner ***(cas particulier deg(P) = 3)***

Effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-c)$: $P(x) = (x-c) \cdot Q(x) + R$

$$R(x) = R \ \text{ est une constante } \ \text{car } \ 0 \le deg(R) < deg(x-c) \ \text{ et } \ deg(Q) = deg(P) - 1$$

$$\begin{aligned} P(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ &= (x-c) \cdot \left(b_2x^2 + b_1x + b_0\right) + R \\ &= b_2x^3 + b_1x^2 + b_0x - cb_2x^2 - cb_1x - cb_0 + R \\ &= b_2x^3 + \left(b_1 - cb_2\right)x^2 + \left(b_0 - cb_1\right)x - cb_0 + R \end{aligned}$$

En comparant la 1ère et la 4e ligne ci-dessus, on peut donc tirer les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} a_3 &= b_2 \\ a_2 &= b_1 - cb_2 \\ a_1 &= b_0 - cb_1 \\ a_0 &= R - cb_0 \end{aligned} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{aligned} b_2 &= a_3 + 0 \\ b_1 &= a_2 + cb_2 \\ b_0 &= a_1 + cb_1 \\ R &= a_0 + cb_0 \end{aligned}$$

On peut donc écrire ces relations grâce au tableau suivant :

Degré des coefficients de *P*	3	2	1	0	
Coefficients de *P*	a_3	a_2	a_1	a_0	+
Valeur de $\boldsymbol{c}$	0	$c \cdot b_2$	$c \cdot b_1$	$c \cdot b_0$	
	b_2	b_1	b_0	R	=

Le quotient est $Q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0 = x^2 + 2x + 1$ et le reste est $R(x) = R$.

Exercice 8

En utilisant le *schéma de Horner*, effectuer les divisions suivantes :

1) $P(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x - 1$ $\qquad T(x) = x - 2$

2) $P(x) = 7x^4 - 3x^3 + 5x - 1$ $\qquad T(x) = x - 3$

3) $P(x) = x^6 - 1$ $\qquad T(x) = x - 1$

4) $P(x) = x^5 - a^5$ $\qquad T(x) = x - a$

1.1.5 Équations polynomiales

Définition

Évaluer un polynôme $P(x)$ au point *a*, c'est calculer la valeur de $P(a)$.

Exemple $P(x)=3x^3-5x^2+7x-6$

Évaluons $P(x)$ en 2 : $P(2)=3(2)^3-5(2)^2+7(2)-6=24-20+14-6=12$

Vocabulaire

Lorsque $\boldsymbol{P(a)=0}$, on dit :

"*a* est une **solution de l'équation** $P(x)=0$" ou " *a* est une **racine** du polynôme $P(x)$".

Un des objets de l'étude des polynômes est la recherche des solutions de l'équation $P(x)=0$.

Exemple

$P(x)=2x^3-x^2+2x-1$

Évaluons $P(x)$ en $\frac{1}{2}$: $P\left(\frac{1}{2}\right)= 2\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)-1=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1-1=0$

$\frac{1}{2}$ est une *solution rationnelle* de l'équation $P(x)=0$.

On dit aussi que $\frac{1}{2}$ est une *racine rationnelle* du polynôme $P(x)$.

Rappels

$\mathbb{N}$ = *Ensemble des* **entiers naturels** = $\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ ...\}$

$\mathbb{Z}$ = *Ensemble des* **entiers relatifs** = $\{....;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ ....\}$

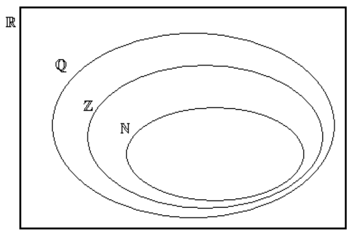
$\mathbb{Q}$ = *Ensemble des* **nombres rationnels** = $\left\{\frac{p}{q} \mid p\in\mathbb{Z}\ et\ q\in\mathbb{N}^*\right\}$

Un **nombre irrationnel** est un nombre qui ne peut pas s'écrire sous forme de fraction, ou un nombre dont le développement décimal est illimité et non périodique.

Exemples $\pi=3{,}14159265358979323 85......$ et $\sqrt{2}=1{,}4142135623730950488 01.................$

Lorsqu'on considère l'ensemble de tous les nombres : entiers naturels, entiers relatifs, nombres rationnels et irrationnels, on parle de **l'ensemble** $\mathbb{R}$ **des nombres réels.**

Exemples $-2=-\frac{2}{1}$; $\frac{1}{3}=0{,}\overline{3}$; π ; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}\in\mathbb{R}$



On a les inclusions suivantes : $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$

De plus : $\mathbb{R}=irrationels\cup\mathbb{Q}\quad et\quad irrationels\cap\mathbb{Q}=\varnothing$

Exercice 9

Vrai ou faux ? justifier.

1) $x=2$ est une solution de l'équation polynomiale : $(x-2)(x^2-x+3)=0$

2) $x=2$ est une solution de l'équation polynomiale : $(x-2)(x^2-x+3)+2=0$

3) $x=3$ est une racine du polynôme : $P(x)=x^2-4x+3$

4) $x=3$ est une racine du polynôme : $P(x)=(x-3)\cdot Q(x)$ $\quad Q$ est un polynôme.

5) Deux polynômes qui ont les mêmes racines sont égaux.

6) Un polynôme qui admet exactement deux racines distinctes est de degré 2.

7) $x=\sqrt{5}$ est une solution rationnelle de l'équation : $x^2-5=0$

8) $x=4/3$ est une solution irrationnelle de l'équation : $x(3x-4)(x-1)=0$

9) $x=5$ est une solution entière de l'équation : $(3x-4)(x^2-5x)=0$

10) $x=4/3$ est une solution rationnelle de l'équation : $(4x-4)(3x+3)(4x-3)=0$

Résolution d'une équation polynomiale de degré ≤ 2

• Méthode : formules explicites (rappel)

Degré *1* : $\boldsymbol{ax+b=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-\frac{b}{a}}$

Degré *2* : Formule de *Viète*

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad avec \quad \Delta=b^2-4ac\geq 0}$$

De plus, on peut factoriser $\boldsymbol{P(x)=ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)}$

Exemples

a) Degré *1* : $\quad -3x+2=0 \Leftrightarrow -3x=-2 \Leftrightarrow x=\frac{-2}{-3} \Leftrightarrow x=\frac{2}{3} \qquad S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$

b) Degré *2* : **i)** $5x^2+6x+1=0$ avec $a=5\ ;\ b=6\ ;\ c=1$

$$\Delta=16>0 \qquad x_1=\frac{-6-\sqrt{16}}{10}=-1 \qquad x_2=\frac{-6+\sqrt{16}}{10}=-\frac{1}{5} \qquad S=\left\{-1\,;-\frac{1}{5}\right\}$$

De plus $P(x)=5x^2+6x+1=5(x-(-1))\left(x-\left(-\frac{1}{5}\right)\right)=(x+1)(5x+1)$

ii) $3x^2+3x+1=0$ avec $a=3\ ;\ b=3\ ;\ c=1$

$$\Delta=-3<0 \qquad x_1=\frac{-3-\sqrt{-3}}{6}\notin\mathbb{R} \qquad x_2=\frac{-3+\sqrt{-3}}{6}\notin\mathbb{R} \qquad S=\varnothing$$

De plus $P(x)=3x^2+3x+1$ *n'est pas factorisable.*

Exercice 10

a) Déterminer, dans chaque cas, les solutions de l'équation $P(x)=0$ et factoriser le polynôme $P(x)$ en utilisant la formule de Viète :

1) $P(x)=6x^2-x-2$ **2)** $P(x)=9x^2-9x-10$ **3)** $P(x)=9x^2-24x+16$

4) $P(x)=x^2-2\sqrt{3}x+3$ **5)** $P(x)=2x^2+2x-2$ **6)** $P(x)=x^2+x+1$

b) Démontrer que tout polynôme de la forme $P(x)=x^2+a^2$ avec $a\neq 0$ n'est pas factorisable.

Résolution d'une équation polynomiale de degré > 2

• Méthode : formules explicites

Il existe deux formules qui permettent de résoudre à l'aide de radicaux *(* $\sqrt{\ }$ *)* toutes les équations du 3ème degré *(formule de Cardano)* et du 4ème degré *(formule de Ferrari),* mais leur utilisation est peu aisée.

Niels Abel (1802-1829) a démontré qu'il n'existe aucune formule générale pour la résolution des équations polynomiales de degré supérieur à 4. Autrement dit, une équation polynomiale de degré supérieur à 4 n'est en général pas résoluble par radicaux *(* $\sqrt{\ }$ *)*. Certaines équations particulières le sont.

Résolution d'une équation polynomiale de degré ≥ 2

• Méthode : factorisation du polynôme

• Outils : mise en évidence, identités remarquables et formule de Viète

Rappels : identités remarquables (voir CRM)

1) $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$

2) $(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$

3) $(x+a)(x-a)=x^2-a^2$

4) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

5) x^2+a^2 *ne peut pas s'écrire comme un produit de deux polynômes.*

6) $(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$

7) $(x-a)^3=x^3-3ax^2+3a^2x-a^3$

8) $(x-a)(x^2+ax+a^2)=x^3-a^3$

9) $(x+a)(x^2-ax+a^2)=x^3+a^3$

Exemples

a) $x^3 - x^2 - 2x = 0$ — *Mise en évidence*

$\Leftrightarrow x\left(x^2 - x - 2\right) = 0$ — *Identité* $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

$\Leftrightarrow x(x+1)(x-2) = 0$ — $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ *ou* $B = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ *ou* $x+1 = 0$ *ou* $x-2 = 0$ — $S = \{-1;0;2\}$

b) $3x^3 - 18x^2 + 36x - 24 = 0$ — *Mise en évidence*

$\Leftrightarrow 3\left(x^3 - 6x^2 + 12x - 8\right) = 0$ — *Identité* $(x-a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$

$\Leftrightarrow 3(x-2)^3 = 0$ — $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ *ou* $B = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0$ — $S = \{2\}$

c) $x^4 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2\right)^2 - \left(1^2\right)^2 = 0$ — *Identité* $(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 1\right) = 0$ — *Identité* $(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)\underbrace{\left(x^2+1\right)}_{\Delta<0} = 0$ — $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ *ou* $B = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0$ *ou* $x + 1 = 0$ — $S = \{-1;1\}$

d) $3x^3 - 5x^2 - 2x = 0$ — *Mise en évidence*

$\Leftrightarrow x\underbrace{\left(3x^2 - 5x - 2\right)}_{\Delta>0} = 0$ — *Formule de Viète :* $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

$\Leftrightarrow x \cdot 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x-2) = 0$ — $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ *ou* $B = 0$

$\Leftrightarrow 3x = 0$ *ou* $x + \frac{1}{3} = 0$ *ou* $x - 2 = 0$ — $S = \left\{-\frac{1}{3};0;2\right\}$

Remarques

a) Factoriser un polynôme, c'est le transformer en produit de polynômes.

b) $A + B = 0 \quad \not\Leftrightarrow \quad A = 0$ *ou* $B = 0$

$A + B = 1 \quad \not\Leftrightarrow \quad A = 1$ *ou* $B = 1$

c)

> Pour **factoriser** le plus possible un polynôme P et **résoudre l'équation** polynomiale $P(x) = 0$ il faut utiliser si possible les « 3 outils » suivants :
>
> **1)** la mise en évidence.
>
> **2)** les identités remarquables.
>
> **3)** la formule de Viète.

Exercice 11

Résoudre par factorisation les équations polynomiales suivantes. *(Réponses en valeurs exactes)*

1) $x^2-9=0$

2) $35t^2+7t=0$

3) $x^2-81=0$

4) $x^2+81=0$

5) $121x^2-25=0$

6) $\frac{9}{4}-t^2=0$

7) $12u^2=6u$

8) $x^2-4x-21=0$

9) $t^2-14t+13=0$

10) $2x^2+2x-40=0$

11) $6x^2-12x=-6$

12) $12y^2=12y-3$

13) $\left(3v^2-16v+5\right)\left(v^2+5\right)=0$

14) $3x^3-12x^2-63x=0$

15) $2x^4-20x^3-48x^2=0$

16) $t^3-14t^2+13t=0$

17) $3t^3+21t^2+36t=0$

18) $2t^3-t^2=6t$

19) $x^3+3x^2+3x+1=0$

20) $x^3-6x^2+12x-8=0$

21) $8x^3+12x^2+6x+1=0$

22) $x^3+24x^2=-192x-512$

23) $x^3-9x^2+27x-27=0$

24) $2y^3-6y^2+6y-2=0$

25) $t^3-12t^2+48t-64=0$

26) $3(x-1)^3=0$

27) $(x-1)(2x+1)(2x+2)=0$

28) $x^3+8=0$

29) $2x^3+54=0$

30) $10z^4=10z$

31) $-x^3=64$

32) $\left(x^3-8\right)\left(x^3+125\right)=0$

Résolution d'une équation polynomiale de degré ≥ 2

- Méthode : factorisation du polynôme
- Outil : critère de divisibilité par *(x - a)*

Exemple

On aimerait résoudre l'équation polynomiale $\underbrace{x^3-5x^2+2x+8}_{P(x)}=0$

- Constatation : **1)** On ne peut mettre aucun terme commun en évidence.

  2) Aucune identité du 3e degré ne permet de factoriser le polynôme.

  3) On ne peut pas utiliser la formule de *Viète* car le polynôme n'est pas de degré 2.

- Comment procéder alors ?

  Idée : On cherche une solution « évidente » de l'équation et on l'utilise pour factoriser le polynôme.

  En évaluant *P* avec des valeurs entières proche de zéro on trouve que ***2*** est une solution de l'équation $P(x)=0$ car $P(\mathbf{2}) = 0$

- On effectue **une division euclidienne** de $P(x)$ avec $x-\mathbf{2}$:

$$\begin{array}{l|l}
x^3-5x^2+2x+8 & x-2 \\
\underline{-(x^3-2x^2)} & x^2-3x-4 = Q(x) \\
\quad -3x^2+2x+8 & \\
\quad \underline{-(-3x^2+6x)} & \\
\qquad -4x+8 & \\
\qquad \underline{-(-4x+8)} & \\
\qquad\qquad 0 = R(x) &
\end{array}$$

- Le reste de la division valant zéro nous avons **factorisé** partiellement le polynôme *P* et nous pouvons écrire :

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot(x^2-3x-4)=0$$

- On utilise une **identité remarquable** du 2e degré pour factoriser le polynôme *Q* :

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+1)(x-4)=0 \qquad \textit{Identité } x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

- Pour conclure :

$$\Leftrightarrow x-2=0 \text{ ou } x+1=0 \text{ ou } x-4=0 \qquad A\cdot B=0 \Leftrightarrow A=0 \text{ ou } B=0$$

$$\Leftrightarrow x=2 \text{ ou } x=-1 \text{ ou } x=4 \qquad S=\{-1;2;4\}$$

Théorème 1

> Soit $P(x)$ un polynôme et $a \in \mathbb{R}$.
> $P(a)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \textit{Il existe un polynôme } Q(x) \textit{ tel que } P(x)=(x-a)\cdot Q(x)$

Remarque

Le théorème ci-dessus peut aussi s'énoncer ainsi :

« L'équation $P(x)=0$ possède a comme solution si et seulement si le polynôme P se factorise et possède un facteur $(x-a)$ » ou « $P(a)=0 \quad \Leftrightarrow \quad P(x) \textit{ est divisible par } (x-a)$ »

Exemple

On veut résoudre l'équation polynômiale de degré *4* suivante : $\underbrace{\boldsymbol{x^4-6x^2+5}}_{P(x)}\boldsymbol{=0}$

• On **cherche** une ou des solutions de l'équation et on les utilise pour factoriser le polynôme *P* :
P(***-1***) = *0* et *P*(***1***) = *0* donc $P(x) \textit{ est divisible par } (x-1)(x+1)$ (*théorème 1*)

• On effectue **une division euclidienne** de *P*(*x*) avec $(x-1)(x+1)=x^2-1$:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4-6x^2+5 & x^2-1 \\
\cline{2-2}
\underline{-(x^4-x^2)} & x^2-5 \ = \ Q(x) \\
\quad -5x^2+5 & \\
\quad \underline{-(-5x^2+5)} & \\
\qquad\qquad 0 \ = \ R(x) &
\end{array}
$$

• Le reste de la division valant zéro nous avons **factorisé le polynôme *P*** et nous pouvons écrire :
$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)\cdot(x^2-5)=0$

• On utilise une **identité remarquable** du 2^{e} degré pour factoriser le polynôme *Q* :
$\Leftrightarrow (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-\sqrt{5})\cdot(x+\sqrt{5})=0$ *Identité* $x^2-a^2=(x+a)(x-a)$

• Pour **conclure** :

$\Leftrightarrow x-1=0 \ \textit{ou} \ x+1=0 \ \textit{ou} \ x-\sqrt{5}=0 \ \textit{ou} \ x+\sqrt{5}=0$ $\quad A\cdot B=0 \ \Leftrightarrow \ A=0 \ \textit{ou} \ B=0$

$\Leftrightarrow x=1 \ \textit{ou} \ x=-1 \ \textit{ou} \ x=\sqrt{5} \ \textit{ou} \ x=-\sqrt{5}$ $\quad \boldsymbol{S=\{-\sqrt{5};-1;1;\sqrt{5}\}}$

Remarque

> Pour **factoriser** le plus possible un polynôme *P* et **résoudre l'équation** polynomiale $P(x)=0$ il faut utiliser si possible les « 4 outils » suivants :
>
> **1)** la mise en évidence.
>
> **2)** les identités remarquables.
>
> **3)** la formule de Viète.
>
> **4)** le critère de divisibilité par $(x-a)$. (*Théorème 1*)

Démonstration du théorème 1

$\boxed{\Rightarrow}$

On effectue la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-a)$ et on obtient un quotient $Q(x)$ et un reste $R(x)$ tel que : $P(x)=(x-a)\cdot Q(x)+R(x)$ avec $deg(R(x))<deg(x-a)=1$

$\Rightarrow deg(R(x))=0 \Rightarrow R(x)=Cte$ donc $P(x)=(x-a)\cdot Q(x)+Cte$

Par hypothèse $P(a)=0 \Leftrightarrow \underbrace{(a-a)}_{=0}\cdot Q(a)+Cte=0 \Leftrightarrow Cte=0$.

Finalement : $P(x)=(x-a)\cdot Q(x)$

$\boxed{\Leftarrow}$

Par hypothèse, $P(x)$ est divisible par $(x-a)$ $: P(x)=Q(x)\cdot(x-a)$

On évalue P au point a : $P(a)=Q(a)\cdot\underbrace{(a-a)}_{=0}=0$ □

Exercice 12

Soit le polynôme $P(x)=x^3-2x^2-9x+18$

1) Soit $\boldsymbol{x=2}$, calculer $P(\boldsymbol{2})$.

2) Effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-\boldsymbol{2})$.

3) Utiliser 2) pour résoudre l'équation $x^3-2x^2-9x+18=0$.

4) Faire de même, mais avec $\boldsymbol{x=3}$.

5) Faire de même, mais avec $\boldsymbol{x=-3}$.

Exercice 13

a) Factorisez les polynômes ci-dessous. *(Réponses en valeurs exactes)*

b) Résoudre l'équation $P(x)=0$. *(Réponses en valeurs exactes)*

1) $P(x)=3x^3+15x^2+12x+60$

2) $P(t)=2t^4+2t^3-14t^2-14t$

3) $P(x)=3x^4+9x^3+9x^2+9x+6$

4) $P(x)=12x^3-13x^2+1$

5) $P(z)=3z^5-3z^2$

6) $P(v)=2v^3+12v^2+24v+16$

7) $P(m)=(3m+1)\cdot(m-1)\cdot\left(m-\sqrt{2}\right)\cdot\left(m+\sqrt{5}\right)$

8) $P(x)=3x^4-3$

9) $P(k)=k^3-2k+1$

Exercice 14

a) $P(x)=8x^3-14x^2-7x+6$ est-il divisible par $\left(x+\dfrac{3}{4}\right)$? Justifier sans calculs inutiles.

b) $P(x)=4x^4+4x^3-17x^2-9x+18$ admet comme facteur $(x-2008)$?
Justifier sans calculs inutiles.

c) Soit $P(x)=(2x-54)\left(x^{1000}+x^{999}+x+1\right)$. Donner une racine de *P*.

d) Vrai ou faux ? Justifier sans calculs inutiles.

1) $P(x)=x^3-6x^2-x+30=(x-3)Q(x)$ Q un polynôme de degré 2

2) $P(x)=x^3-6x^2-x+30=(x+2)\widetilde{Q}(x)$ $\widetilde{Q}$ un polynôme de degré 3

3) $P(x)=x^4-11x^3+29x^2+35x-150=(x-3)(x-7)\widehat{Q}(x)$ $\widehat{Q}$ un polynôme de degré 2

e) Déterminer un polynôme *P* de degré 5 tel que $P(3)=0$, $P(4)=0$ et $P(-6)=0$

Théorème 2 *

> Soit P un polynôme à *coefficients entiers*, c'est-à-dire que
> $P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ \dots\ +a_2x^2+a_1x+a_0$ avec $a_i\in\mathbb{Z}$ et $\dfrac{p}{q}$ une fraction irréductible.
>
> **Si** $\dfrac{p}{q}$ est une *solution rationnelle* de $P(x)=0$ **alors** p est un diviseur de a_0 et q un diviseur de a_n.

Exemple *

On veut résoudre l'équation polynômiale de degré 4 suivante : $\underbrace{4x^3-x^2-12x+3}_{P(x)}=0$

- On **cherche** une ou des solutions de l'équation et on les utilise pour factoriser le polynôme P :
  On ne trouve aucune solution entière à l'équation $P(x)=0$.
- D'après **le théorème *2***, s'il existe une solution rationnelle $p\,/\,q$
  alors p est un diviseur de $a_0=3$ et q est un diviseur de $a_3=4$.
  Toutes les possibilités pour $p\,/\,q$ sont réunies dans le tableau suivant :

$p=div(3)$ \ $q=div(4)$	± 1	± 3
± 1	± 1	± 3
± 2	$\pm 1/2$	$\pm 3/2$
± 4	$\pm 1/4$	$\pm 3/4$

- On **teste** toutes les valeurs : $.....;\ P(1)\neq 0\ ;\ P(-1)\neq 0\ ;\ P\left(\dfrac{1}{4}\right)=0\ ;\ P\left(-\dfrac{1}{4}\right)\neq 0\ ;\ ......$

  donc $P(x)$ *est divisible par* $\left(x-\dfrac{1}{4}\right)$ **(*théorème 1*)**

- On effectue **une division euclidienne** de $P(x)$ avec $\left(x-\dfrac{1}{4}\right)$:

$$\begin{array}{l|l}
4x^3-x^2-12x+3 & x-\dfrac{1}{4} \\ \cline{2-2}
-\left(4x^3-x^2\right) & 4x^2-12\ =\ Q(x) \\ \cline{1-1}
\quad -12x+3 & \\
-\left(-12x+3\right) & \\ \cline{1-1}
\qquad 0\ =\ R(x) &
\end{array}$$

- Le reste de la division valant zéro nous avons **factorisé le polynôme *P*** et nous pouvons écrire :
  $\Leftrightarrow \left(x-\dfrac{1}{4}\right)\left(4x^2-12\right)=0 \Leftrightarrow (4x-1)\left(x^2-3\right)=0$
- On utilise une **identité remarquable** du 2^e^ degré pour factoriser le polynôme Q :
  $\Leftrightarrow (4x-1)\cdot\left(x-\sqrt{3}\right)\cdot\left(x+\sqrt{3}\right)=0$ *Identité* $x^2-a^2=(x+a)(x-a)$

- Pour **conclure** : $\boldsymbol{S=\left\{-\sqrt{3};\dfrac{1}{4};\sqrt{3}\right\}}$

Remarque *

Le théorème *2* permet de dresser la liste des **racines rationnelles possibles** d'un polynôme à coefficients entiers, mais ne dit rien à propos **des racines irrationnelles**.

Exemple : $P(x) = x^4 - 8x^2 + 15 = \left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)$

Les 4 racines de P sont toutes irrationnelles : $\left\{-\sqrt{5};-\sqrt{3};\sqrt{3};\sqrt{5}\right\}$

D'après **le théorème *2***, s'il existe une solution rationnelle p / q
alors p est un diviseur de $a_0 = 15$ et q est un diviseur de $a_4 = 1$.

$q = div(1)$ \ $p = div(15)$	± 1	± 3	± 5	± 15
± 1	± 1	± 3	± 5	± 15

La réciproque du théorème *2* est donc fausse :

« Si p est un diviseur de a_0 et q un diviseur de a_n $\not\Rightarrow$ $\dfrac{p}{q}$ est une *racine rationnelle* de P. »

Démonstration théorème 2 * ***(cas particulier deg(P)=3)***

- Supposons que $\dfrac{p}{q}$ est une racine rationnelle de $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$

  et que $\dfrac{p}{q}$ est une fraction irréductible (c-à-d p et q ont un seul diviseurs communs qui est *1*).

  On a donc que $P\left(\dfrac{p}{q}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_3\left(\dfrac{p}{q}\right)^3 + a_2\left(\dfrac{p}{q}\right)^2 + a_1\left(\dfrac{p}{q}\right)^1 + a_0 = 0$

- Si on multiplie par q^3 on obtient : $a_3p^3 + a_2p^2q + a_1pq^2 + a_0q^3 = 0$

- On peut regrouper cette expression de deux façons différentes :

  (1) $p \cdot \left(a_3p^2 + a_2pq + a_1q^2\right) = -a_0q^3$

  (2) $-a_3p^3 = q \cdot \left(a_2p^2 + a_1pq + a_0q^2\right)$

- Dans (*1*) p divise le membre de gauche, donc p divise aussi $-a_0q^3$.

  $\dfrac{p}{q}$ est par hypothèse une fraction irréductible donc p ne divise pas le terme $q^3 = q \cdot q \cdot q$

  ce qui implique que p divise forcément a_0 .

- Dans (*2*) q divise le membre de droite, donc q divise aussi $-a_3p^3$.

  $\dfrac{p}{q}$ est par hypothèse une fraction irréductible donc q ne divise pas le terme $p^3 = p \cdot p \cdot p$

  ce qui implique que p divise forcément a_3 . □

Exercice 15 *

a) Factorisez les polynômes ci-dessous.

Indication : utiliser si nécessaire le théorème 2 pour déterminer les éventuelles racines rationnelles des polynômes P.

b) Résoudre l'équation $P(x)=0$. *(Réponses en valeurs exactes)*

1) $P(x)=5x^3-x^2-15x+3$ **2)** $P(x)=8x^3+2x^2+24x+6$

3) $P(x)=45x^4+24x^3-7x^2-2x$ **4)** $P(x)=6x^4+7x^3+3x^2+7x-3$

5) $P(t)=t^4-10t^3-600t^2$ **6)** $P(x)=x^4-101x^3+98x^2+202x-200$

7) $P(s)=(6s^2+7s+2)(2s^2-9s+9)$ **8)** $P(x)=(x^3+x)(2x^3+4x)$

Exercice 16 *

Déterminer toutes les valeurs de *k*, tel que *P(x)* soit divisible par le polynôme indiqué.

1) $P(x)=kx^3+x^2+k^2x+3k^2+11$ $x+2$

2) $P(x)=k^2x^3-4kx+3$ $x-1$

Exercice 17 *

1) Montrer que le polynôme $P(X)=X^{n+1}-nX^n+(n-1)$ admet comme facteur $X-1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

2) Le polynôme $P(X)=(X+2)^n+X^n$ admet-il comme facteur $X+1 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$? Justifier.

Exercice 18 *

Déterminer les nombres $a,b\in\mathbb{R}$ tel que $A(x)$ soit divisible par $B(x)$.

1) $A(x)=x^4-ax^3+ax^2-(4b-a)x+42$ $B(x)=x^2-5x+6$

2) $A(x)=ax^4+bx^3+16$ $B(x)=(x+2)^2$

1.1.6 Le théorème fondamental

Questions

Pour résoudre une équation polynomiale et obtenir toutes les solutions, on essaie de **factoriser le plus possible le polynôme**.

On doit donc se poser les questions suivantes :

a) Combien de solutions possède une équation polynomiale ?

b) Les polynômes de degré un et ceux du second degré à discriminant négatif $(\Delta < 0)$ sont-ils les seuls à ne pas être factorisables ? Y en a-t-il d'autres ?

c) Quel est le critère permettant de savoir si un polynôme est entièrement factorisé ?

Pour répondre à ces questions, on commencera par étudier une analogie avec les nombres entiers.

Définition

Un nombre $n \in \mathbb{N}^*$ est un **nombre premier**, s'il a exactement deux diviseurs distincts dans $\mathbb{N}^*$: 1 et n .

Exemples

$13 = 1 \cdot 13 \quad 13 = 13 \cdot 1 \quad \text{et pas d'autres décompositions} \quad \text{donc } 13 \text{ est premier.}$

$4 = 1 \cdot 4 \quad 4 = 4 \cdot 1 \quad \text{et } 4 = 2 \cdot 2 \quad \text{donc } 4 \text{ n'est pas premier.}$

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ….. sont des nombres premiers.

Remarques

a) Euclide : « Il existe une infinité de nombres premiers ».

b) Si un nombre n'est pas premier, on dit qu'il est **composé**. Exemples : *4 ; 6 ; 8…* sont composés.

c) Le nombre *1* n'est pas premier car il a un seul diviseur : lui-même.

a) Théorème fondamental de l'arithmétique

Tout entier positif différent de *1* peut être écrit comme un produit de nombres premiers.

Cette décomposition est unique, à l'ordre des facteurs près.

La démonstration de ce théorème, sort du cadre de ce cours et ne sera donc pas exposée ici.

Exemples

Décomposons **12 et 60** en produit de nombres premiers : (divisions successives)

12	**2**
6	**2**
3	**3**
1	

$\Rightarrow 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$

60	**2**
30	**2**
15	**3**
5	**5**
1	

$\Rightarrow 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

b) Théorème fondamental de l'algèbre

Tout polynôme peut être écrit comme un produit de polynômes du premier et/ou du second degré à discriminant négatif ($\Delta < 0$), de façon unique.

La démonstration de ce théorème, sort du cadre de ce cours et ne sera donc pas exposée ici.

Exemples

a) $P(x)=3x+1$ $\qquad$ $deg(P)=1$

b) $Q(x)=\underbrace{x^2+2}_{\Delta<0}$ $\qquad$ $deg(Q)=2$

c) $R(x)=x^2-10x+25=(x-5)(x-5)$ $\qquad$ $deg(R)=2$

d) $S(x)=x^3+x^2-26x+24=(x+6)(x-1)(x-4)$ $\qquad$ $deg(S)=3$

e) $T(x)=x^4+5x^3-2x^2+20x-24=(x+6)(x-1)\underbrace{(x^2+4)}_{\Delta<0}$ $\qquad$ $deg(T)=4$

Corollaire *(conséquence du théorème fondamental de l'algèbre)*

Une équation polynomiale de degré *n* **a au plus** *n* solutions réelles (*n* racines réelles).

Exemples

a) L'équation polynomiale de degré 2 : $x^2-10x+25=0 \Leftrightarrow (x-5)(x-5)=0$ possède au plus 2 solutions réelles.

b) L'équation polynomiale de degré 4 : $x^4+5x^3-2x^2+20x-24=0 \Leftrightarrow (x+6)(x-1)\overbrace{(x^2+4)}^{\Delta<0}=0$ possède au plus 4 solutions réelles.

Démonstration du corollaire

Selon le théorème fondamental de l'algèbre, *tout polynôme* peut être écrit comme un produit de polynômes du premier et/ou du second degré à discriminant négatif ($\Delta < 0$), de façon unique.

Chaque facteur du 1^{er} degré donne une solution et il y en a au plus *n* dans la décomposition d'un polynôme de degré *n*. □

Remarques

a) Le résultat déjà obtenu en première année, à savoir que les polynômes de degré un et ceux du deuxième degré à discriminant négatif ($\Delta < 0$) ne sont pas factorisables, prend une autre dimension : ces polynômes sont en fait les seuls qui ne soient pas factorisables.

b) Ces théorèmes ne donnent pas « d'outils » explicites de calculs pour trouver les solutions d'une équation polynomiale de degré *n*. On dit que ce sont des théorèmes d'existence.

c) Pour résoudre une équation polynomiale on essaie de trouver la décomposition du polynôme en produit de polynômes du premier et/ou du second degré à discriminant négatif ($\Delta < 0$). Cette décomposition peut être obtenue à l'aide des « outils » utilisés pour factoriser les polynômes, à savoir : la mise en évidence, les identités remarquables, la formule de Viète, le critère de divisibilité, etc.

Multiplicité des racines d'un polynôme

Lorsque l'on dénombre les racines d'un polynôme, on tient compte de leur **multiplicité**, c'est-à-dire du nombre de polynômes du premier degré donnant cette racine.

Définition

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
On dit que α est une *racine de multiplicité k* de *P* si $P(x) = (x-\alpha)^k Q(x)$.
Lorsque $k = 1$ on parle d'une *racine simple*, lorsque $k = 2$ d'une *racine double* , etc.

Exemple

Le polynôme $P(x) = (x-4)^3 (x-2)(x+1)^2$ possède trois racines distinctes : *4, 2* et *–1*.

4 est une *racine de multiplicité 3* de *P* car $P(x) = (x-4)^3 Q(x)$.

2 est une *racine de multiplicité 1 (simple)* de *P* car $P(x) = (x-2)^1 \widetilde{Q}(x)$.

–1 est une *racine de multiplicité 2 (double)* de *P* car $P(x) = (x-(-1))^2 \widehat{Q}(x)$.

Le polynôme $P(x)$ est de degré *6* et possède $3+1+2=6$ racines qui sont : *4, 4, 4, 2, –1* et *–1*.

Exercice 19

a) Les polynômes suivants sont-ils entièrement factorisés ?

Si oui, justifier et si non, factoriser les termes qui peuvent encore l'être.

1) $P(x) = x+1$

2) $P(x) = x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

3) $P(x) = x^3 - x^2 + x = x(x^2 - x + 1)$

4) $P(x) = 3x^3 - 12x^2 - 63x$

5) $P(x) = x^3 + x^2 - 26x + 24 = (x^2 + 5x - 6)(x-4)$

6) $P(x) = x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2+1)(x^2+2)$

b) Déterminer *le degré* et *toutes les racines réelles* des polynômes du point *a)*.

c) L'affirmation suivante est-elle correcte ? Justifier clairement votre réponse.

« Une équation polynomiale de degré *n* **a au plus** *n* solutions réelles (n racines réelles). »

Exercice 20

Déterminer pour chacun des polynômes suivants, le degré, le nombre de racines distinctes et leurs multiplicités.

1) $P(x)=(2x+4)(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(2x-2)$

2) $Q(x)=-3(x+3)(x+3)(x+3)(x-3)$

3) $R(x)=(x-1)^2(x-2)^2$

4) $S(x)=(x^2-2)(x^2+2)$

5) $T(x)=(x^2+2)(x^2+4)$

6) $U(x)=(x^2+2)+(x^2-4)$

7) $V(x)=3(x-7)^4(x-2)^6(x^2-2x+1)$

8) $W(x)=(x^2+1)(x^2+2)(x^2+2x+1)^2$

Exercice 21

Déterminer un polynôme P sans développer l'expression :

1) de degré 2 dont les solutions de $P(x)=0$ sont $S=\{-3;2\}$.

2) de degré 3 dont les solutions de $P(x)=0$ sont $S=\{-2;0;12\}$.

3) de degré 100 dont les solutions de $P(x)=0$ sont $S=\{1;2;3;...;99;100\}$.

4) de degré 2 dont les solutions de $P(x)=0$ sont $S=\{1;2\}$ et tel que $P(0)=10$.

5) de degré 3 dont les solutions de $P(x)=0$ sont $S=\{-3;1;2\}$ et tel que $P(3)=48$.

6) de degré 4 qui admet 2 racines distinctes de multiplicité 2.

7) de degré 5 qui admet comme unique racine 3 et qui est de multiplicité 3.

8) de degré 2 qui est divisible par $(x+6)$, dont une racine est -2 et $P(-1)=\frac{5}{2}$.

9) de degré 3 qui est divisible par $(x+6)$, -2 et $\frac{3}{4}$ sont des racines et $P(-1)=\frac{5}{2}$.

Exercice 22

Vrai ou faux ? Justifier clairement votre réponse.

1) Un polynôme peut toujours se factoriser.

2) Un polynôme qui a $1,2,3,4$ et 5 comme racines n'est pas de degré 4.

3) Un polynôme qui a $1,2,3,4$ et 5 comme racines est de degré 5.

4) Deux polynômes qui ont les mêmes racines sont égaux.

5) Deux polynômes de degré 5 qui ont les mêmes racines et de même multiplicité sont égaux.

6) Un polynôme de degré 3 possède au moins une racine réelle.

7) Un polynôme de degré 4 possède au moins une racine réelle.

8) Le polynôme $P(x)=3(x-7)^3(2x-2)^5(x+1)^4$ possède trois racines distinctes dont une racine est de multiplicité 2.

1.1.7 Ce qu'il faut absolument savoir

1♥ Connaître la définition d'un monôme. □ ok

2♥ Connaître la définition d'un polynôme. □ ok

3♥ Connaître la définition du degré d'un polynôme. □ ok

4♥ Calculer la somme, la différence, le produit d'un polynôme par un nombre réel et le produit de deux polynômes. □ ok

5♥ Diviser un polynôme par un autre polynôme (division euclidienne). □ ok

6♥ Utiliser le *schéma de Horner*. □ ok

7♥ Connaître le terme : racine d'un polynôme. □ ok

8♥ Savoir reconnaître la nature d'une solution d'une équation polynomiale (entière relative, rationnelle, irrationnelle). □ ok

9♥ Résoudre une équation polynomiale du premier degré. □ ok

10♥ Résoudre une équation polynomiale du second degré avec la *formule de Viète.* □ ok

11♥ Connaître parfaitement les identités remarquables de degré deux et trois. □ ok

12♥ Connaître et appliquer le critère de divisibilité par $(x-a)$ *(théorème 1).* □ ok

13♥* Connaître et appliquer le théorème des diviseurs *(théorème 2)* *. □ ok

14♥ Résoudre certaines équations polynomiales de degré supérieur à *2.* □ ok

15♥ Connaître et comprendre *le théorème fondamental de l'algèbre* et son corollaire. □ ok

16♥ Déterminer la multiplicité des racines d'un polynôme. □ ok

1.2 Fractions rationnelles

1.2.1 Définitions

Définition

Une **fraction rationnelle** est une expression mathématique qui peut être mise sous la forme d'un quotient de deux polynômes.

Exemples

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x+3}{x-5}$ et $\frac{S(x)}{R(x)} = \frac{x^3+3x-4}{x^2+1}$ sont des fractions rationnelles.

$\frac{T(x)}{Q(x)} = \frac{\sqrt{x+3}+4}{x+2}$ n'est pas une fraction rationnelle (présence de la variable sous un radical).

Les fractions rationnelles **peuvent ne pas donner de nombre réel** pour certaines valeurs de x ; c'est-à-dire qu'il peut exister des valeurs de x pour lesquelles il n'est pas possible de calculer la valeur de la fraction rationnelle.

Définition

Le **domaine de définition** d'une expression mathématique est l'ensemble des nombres réels pour lesquels cette expression existe c'est-à-dire pour lesquels il est possible de déterminer sa valeur.

On note généralement *Dom* (ou D_A) le domaine de définition de l'expression A.

Exemples

a) Si $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x+3}{x-5}$, alors $Dom = \mathbb{R} \setminus \{5\}$, car 5 est la seule valeur pour laquelle la fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$ n'existe pas (dénominateur nul ; division par zéro) .
Pour tous les autres nombres réels, il est possible de calculer la valeur de cette expression.

b) Si $\frac{S(x)}{R(x)} = \frac{x^3+3x-4}{x^2+1}$, alors $Dom = \mathbb{R}$, car cette expression existe pour n'importe quelle valeur de la variable x (le dénominateur x^2+1 n'est jamais égal à zéro ; pas de division par zéro).

Remarque

Le domaine de définition d'un **polynôme à une variable**

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, avec a_0 , a_1 ,... ,$a_n \in \mathbb{R}$ et
est toujours $Dom = \mathbb{R}$.

1.2.2 Simplification d’une fraction rationnelle

Exemples

a) $\frac{x^2+4x-21}{x^2+x-12}=\frac{(x+7)\cancel{(x-3)}}{(x+4)\cancel{(x-3)}}=\frac{x+7}{x+4}$ $\quad Dom=\mathbb{R}\setminus\{-4;3\}$

b) $\frac{x^2+2x-3}{x^2+3x}=\frac{\cancel{(x+3)}(x-1)}{x\cancel{(x+3)}}=\frac{x-1}{x}$ $\quad Dom=\mathbb{R}\setminus\{-3;0\}$

c) $\frac{x+2}{x^2+2x-3}=\frac{x+2}{(x+3)(x-1)}$ $\quad Dom=\mathbb{R}\setminus\{-3;1\}$ (fraction rationnelle irréductible)

Marche à suivre pour simplifier une fraction rationnelle

1) Factoriser le numérateur et le dénominateur.

2) Simplifier tous les facteurs communs au numérateur et au dénominateur.

3) Déterminer les nombres pour lesquels la fraction est définie (domaine de définition).

Remarque

A ne jamais oublier : « *On ne peut simplifier que les facteurs communs* »

Erreurs classiques : $\frac{x^3+2}{x^5}=\frac{2}{x^2}$; $\frac{a+b}{a}=b$

1.2.3 Opérations sur les fractions rationnelles

a) Somme de deux fractions rationnelles : (addition)

Exemple

$$\underbrace{ppcm\left[(x-3);(x+2)\right]=(x-3)(x+2)}_{\downarrow}$$

$$\frac{5x}{x^2-3x}+\frac{x-2}{x+2}=\frac{5\cancel{x}}{\cancel{x}(x-3)}+\frac{x-2}{x+2}=\frac{5(x+2)+(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$

$$=\frac{x^2+16}{(x-3)(x+2)}=\frac{x^2+16}{x^2-x-6} \qquad Dom=\mathbb{R}\setminus\{-2;0;3\}$$

Marche à suivre pour additionner deux fractions rationnelles

1) Simplifier chaque fraction rationnelle (factoriser le numérateur et le dénominateur).

2) Chercher le *ppcm* des dénominateurs.

3) Appliquer les relations suivantes : $\boldsymbol{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}}$ ou $\boldsymbol{\frac{a}{b}+\frac{c}{k\cdot b}=\frac{a\cdot k+c}{k\cdot b}}$

4) Simplifier la fraction rationnelle obtenue et indiquer le domaine de définition.

b) Différence de deux fractions rationnelles : (soustraction)

Exemple

$$\frac{6}{3x+9}-\frac{x+4}{x^2-9}=\frac{\cancel{3}\cdot 2}{\cancel{3}(x+3)}-\frac{x+4}{(x-3)(x+3)}=\frac{2(x-3)-(x+4)}{(x-3)(x+3)}=\frac{x-10}{x^2-9} \qquad Dom=\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}$$

$$\overbrace{ppcm\left[(x+3)\,;(x-3)(x+3)\right]=(x-3)(x+3)}$$

Marche à suivre pour soustraire deux fractions rationnelles

1) Simplifier chaque fraction rationnelle (factoriser le numérateur et le dénominateur).

2) Chercher le *ppcm* des dénominateurs.

3) Appliquer les relations suivantes : $\boldsymbol{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}}$ ou $\boldsymbol{\frac{a}{b}-\frac{c}{k\cdot b}=\frac{a\cdot k-c}{k\cdot b}}$

4) Simplifier la fraction rationnelle obtenue et indiquer le domaine de définition.

c) Produit de deux fractions rationnelles : (multiplication)

Exemple

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2+7x-8}\cdot\frac{x^2-64}{x^2-9}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x+8)(x-1)}\cdot\frac{(x-8)(x+8)}{(x-3)(x+3)}=\frac{(x-2)\cancel{(x-3)}(x-8)\cancel{(x+8)}}{\cancel{(x+8)}(x-1)\cancel{(x-3)}(x+3)}$$

$$=\frac{(x-2)(x-8)}{(x-1)(x+3)}=\frac{x^2-10x+16}{x^2+2x-3} \qquad Dom=\mathbb{R}\setminus\{-8;-3;1;3\}$$

Marche à suivre pour multiplier deux fractions rationnelles

1) Simplifier chaque fraction rationnelle (factoriser le numérateur et le dénominateur).

2) Appliquer la relation suivante : $\boldsymbol{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}}$

3) Simplifier la fraction rationnelle obtenue et indiquer le domaine de définition.

d) Quotient de deux fractions rationnelles : (division)

Exemple

$$\frac{5x}{x^2-3x}\div\frac{x-2}{x+2}=\frac{5\cancel{x}}{\cancel{x}(x-3)}\div\frac{x-2}{x+2}=\frac{5}{x-3}\cdot\frac{x+2}{x-2}$$

$$=\frac{5(x+2)}{(x-3)(x-2)}=\frac{5x+10}{x^2-5x+6} \qquad Dom=\mathbb{R}\setminus\{-2;0;2;3\}$$

Marche à suivre pour diviser deux fractions rationnelles

1) Simplifier chaque fraction rationnelle (factoriser le numérateur et le dénominateur).

2) Appliquer la relation suivante : $\boldsymbol{\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}}$

3) Simplifier la fraction rationnelle obtenue et indiquer le domaine de définition.

Remarques

a) Pour additionner, soustraire, multiplier ou diviser des fractions rationnelles, on agit de la même façon qu'avec **des fractions numériques**. Il faut donc passer par *le plus petit dénominateur commun* pour les additions et les soustractions, alors que la division se fait en multipliant par la fraction inverse.

b) Lorsqu'on additionne, soustrait, multiplie ou divise deux **fractions rationnelles** le résultat est une **fraction rationnelle**.

Exercice 23

Simplifier le plus possible les fractions rationnelles suivantes et indiquer le domaine de définition.

1) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$ **2)** $\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}$ **3)** $\dfrac{4x^2+8x-12}{x^2-6x+5}$

4) $\dfrac{-x^2+9x-18}{x^2+6x-27}$ **5)** $\dfrac{3x^2-21x+36}{2x^2-12x+18}$ **6)** $\dfrac{u^3+4u^2+4u}{u^2-u-6}$

7) $\dfrac{t^4-1}{t^3-t}$ **8)** $\dfrac{2x^2+2x-4}{x^2-6x+5}$ **9)** $\dfrac{y^3+3y^2+2y}{y^2-y-6}$

10) $\dfrac{20x^2-23x+6}{4x^2-11x+6}$ **11)** $\dfrac{10t^2-17t+3}{5t^2+14t-3}$ **12)** $\dfrac{\left(x^2-6x+8\right)\left(x^2-4x+4\right)}{\left(x-2\right)^2\left(x^2-4x+3\right)}$

13) $\dfrac{6z^2+48z+96}{6z^2+21z-12}$ **14)** $\dfrac{p^3-8}{p^2-4}$ **15)** $\dfrac{y^3+7y^2+6y}{y^2-2y-3}$

16) $\dfrac{x^3-1}{\left(x-1\right)^3}$ **17)** $\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$ **18)** $\dfrac{x^4-1}{x^3-1}$

Exercice 24

Effectuer les opérations suivantes entre fractions rationnelles et indiquer le domaine de définition.

1) $\dfrac{x^2-4}{x+2}\cdot\dfrac{2}{4x-2x^2}$ **2)** $\dfrac{2y+6y}{y-2}\cdot\dfrac{y^2-2y}{8}$ **3)** $\dfrac{a^4-25}{16a^3-a}\cdot\dfrac{4a^2+a}{a^2+5}$

4) $\dfrac{25x^3-x}{5x^2}\cdot\dfrac{x-1}{5x-1}\cdot\dfrac{10x}{x^2-1}$ **5)** $\dfrac{a^2-4}{\left(4a\right)^2}\div\dfrac{a+2}{2a}$ **6)** $\dfrac{9x^2-1}{x^2-x}\div\dfrac{3x+1}{x^3-x^4}$

7) $\dfrac{a^2+a-2}{a^2+2a-15}\div\dfrac{a^2+7a+10}{a^2+10a+25}$ **8)** $\dfrac{4}{x^2-3x+2}+\dfrac{2}{x^2-1}$ **9)** $\dfrac{4x}{4x^2-1}+\dfrac{2x}{2x+1}$

10) $\dfrac{3}{2z-1}+\dfrac{8z}{4z^2-1}-\dfrac{2}{2z+1}$ **11)** $\dfrac{a^2-4}{a^2+6}-\dfrac{a^2-6}{a^2+4}$ **12)** $\dfrac{2-3x}{2+3x}-\dfrac{2+3x}{2-3x}$

13) $\dfrac{z+3}{z+2}-\dfrac{z+1}{z}$ **14)** $\dfrac{t}{t^2-25}-\dfrac{1}{2t+10}$ **15)** $\left(\dfrac{x+2}{x}-\dfrac{2}{x^2+x}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$

Suite exercice 24

16) $\left[\left(x+\frac{2x}{x-2}\right)\cdot\left(\frac{2x}{x-2}-2\right)\right]\div\frac{4x^2}{x^2-4}$

17) $\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}-\frac{3}{t^3}\right)\div\left(\frac{1}{t^2}-1\right)$

18) $\left(\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}-2\right)\cdot\left(\frac{x+2}{4}-1\right)$

19) $\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+x}-\frac{x}{x-1}+1$

20) $2+\frac{3}{(x+1)(x-2)}-\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x+3}$

21) $\frac{4}{x+3}+\frac{7}{x-1}+\frac{11}{x^2+3x}-\frac{28}{(x+3)(x-1)}$

Exercice 25 *

Effectuer les opérations suivantes et simplifier le plus possible.

1) $1+\frac{1}{x}$

2) $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}$

3) $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}$

4) $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}$

5) $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}}$

6) $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \atop 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}}$

(7 barres de fractions)

Exercice 26 *

1) Calculer ***a*** et ***b*** tels que :

i) $\frac{x+2}{(x-1)(x+1)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}$

ii) $\frac{2x+1}{(x-2)(x+3)}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+3}$

iii) $\frac{x+1}{(x-4)(x+4)}=\frac{a}{x-4}+\frac{b}{x+4}$

2) Décomposez selon le même schéma les fractions rationnelles :

i) $\frac{x+4}{x^2+3x+2}$ **ii)** $\frac{-2x-9}{x^2-5x-6}$ **iii)** $\frac{x+4}{x^2-5x-6}$

Remarque : cette transformation s'appelle « *décomposition en fraction partielle* ».

Indication : $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}\Leftrightarrow a=b$ *et résoudre un système d'équations 2x2.*

1.2.4 Équations avec des fractions rationnelles

Exemple On veut résoudre l'équation : $\dfrac{x+2}{x-3}=\dfrac{-5(x+1)}{x^2-1}-\dfrac{10x-10}{(x-1)^2(x-3)}$

a) On commence par déterminer son domaine de définition : $Dom = \mathbb{R}\setminus\{-1;1;3\}$

b) On simplifie les fractions rationnelles :

$$\frac{x+2}{x-3}=\frac{-5\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x-1)}-\frac{10\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{2}}(x-3)} \Leftrightarrow \frac{x+2}{x-3}=\frac{-5}{x-1}-\frac{10}{(x-1)(x-3)}$$

c) On transforme l'équation pour la mettre sous la forme : $\dfrac{A(x)}{B(x)}=0$.

$$\frac{x+2}{x-3}=\frac{-5}{x-1}-\frac{10}{(x-1)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2}{x-3}+\frac{5}{x-1}+\frac{10}{(x-1)(x-3)}=0$$

Il faut choisir le plus petit commun multiple

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-1)+5(x-3)+10}{(x-1)(x-3)}=0$$

(de la forme $\dfrac{A(x)}{B(x)}=0$; équation rationnelle)

d) On sait que si $\dfrac{A(x)}{B(x)}=0 \Leftrightarrow A(x)=0$.

Donc : $(x+2)(x-1)+5(x-3)+10=0$

$\Leftrightarrow x^2+x-2+5x-15+10=0$

$\Leftrightarrow x^2+6x-7=0$ $\qquad$ $(\textit{Équation de degré } 2)$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+7)=0$

$\Leftrightarrow\ x-1=0 \ \ ou \ \ x+7=0$

$\Leftrightarrow\ x=1 \ \ ou \ \ x=-7$

e) Mais **attention**, les solutions de cette dernière équation seront des solutions de l'équation de départ uniquement si elles appartiennent à son domaine de définition !
Dans l'exemple ci-dessus, on constate que $1\notin Dom=\mathbb{R}\setminus\{-1;1;3\}$ et $-7\in Dom = \mathbb{R}\setminus\{-1;1;3\}$.
Donc, finalement $\boldsymbol{S=\{-7\}}$.

En résumé

Pour résoudre une **équation contenant des fractions rationnelles**, il faut commencer par déterminer son domaine de définition, puis la mettre sous la forme $\dfrac{A(x)}{B(x)}=0$ et trouver les solutions de l'équation $A(x)=0$; la solution de l'équation de départ est alors l'ensemble des solutions de l'équation $A(x)=0$ qui appartiennent au domaine de définition de l'équation de départ.

Exercice 27

Résoudre les équations avec des fractions rationnelles. *(Réponses en valeurs exactes)*

1) $\dfrac{x-3}{x-5}=5$

2) $\dfrac{t-3}{t-5}=1$

3) $\dfrac{x-3}{x-5}=0$

4) $\dfrac{x^2-10x+25}{4(x-5)}-\dfrac{x-5}{8}=\dfrac{1}{8}$

5) $\dfrac{5u-5}{u^2-1}=\dfrac{3u+3}{u^2+2u+1}+\dfrac{1}{2}$

6) $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2x}{x-1}=0$

7) $\dfrac{x+2}{x^2+2x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4}{9}$

8) $\dfrac{5}{\Psi+1}+\dfrac{4}{\Psi^2-1}=1$

9) $1+\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{x^3+1}$

10) $\dfrac{x+1}{x^2-3x-4}=\dfrac{1}{2x+1}$

11) $\dfrac{x-5}{x-3}-\dfrac{x-7}{x-1}=\dfrac{1}{2x-2}$

12) $\dfrac{v+1}{v^2-1}-\dfrac{1}{v}+\dfrac{v+1}{(v+1)^2}=\dfrac{1}{v^3-v}$

13) $\dfrac{x^2+x}{x^2-1}+\dfrac{x^2-x}{x^2}=1$

14) $\dfrac{y-1}{y}+\dfrac{y^3-2y^2+y}{y(y-1)^3}=\dfrac{2}{y(y-1)}$

15) $\dfrac{t}{t-3}-\dfrac{2}{2-t}=\dfrac{3}{t^2-5t+6}$

16) $\dfrac{x^2-9}{x^2+6x+9}+\dfrac{x^2-4}{(2x+1)(x-2)}=1$

17) $\dfrac{2\Omega^2+2}{\Omega-5}-\dfrac{\Omega^2-25}{\Omega+5}=2$

18) $\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{2x-60}{x^2-1}$

Exercice 28

Voici des relations entre des grandeurs physiques qui sont étudiées au Collège dans le cours de Physique. Résoudre (transformer) les équations (formules) par rapport à l'inconnue donnée.

Exemple : On a $v=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ et on cherche Δx. $\quad v=\dfrac{\Delta x}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t\cdot v=\dfrac{\Delta x}{\cancel{\Delta t}}\cdot\cancel{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta x=\underline{\underline{\Delta t\cdot v}}$

1) $v=\dfrac{x_1-x_0}{t_1-t_0}$	Vitesse moyenne	$x_0=$ $\quad t_1=$
2) $\dfrac{p_1\cdot v_1}{T_1}=\dfrac{p_2\cdot v_2}{T_2}$		$p_2=$ $\quad T_2=$
3) $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=\dfrac{1}{f}$	Lentille sphérique mince.	$p'=$ $\quad f=$
4) $\dfrac{1}{f}=(n-1)\cdot\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)$		$R_2=$ $\quad f=$
5) $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}$	Résistances en parallèles.	$R_2=$
6) $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}$		$R_3=$

1.2.5 Ce qu’il faut absolument savoir

17♥ Connaître la définition d'une fraction rationnelle □ ok

18♥ Obtenir le domaine de définition d'une fraction rationnelle □ ok

19♥ Simplifier le plus possible une fraction rationnelle □ ok

20♥ Calculer la somme, la différence, le produit et le quotient de deux fractions rationnelles □ ok

21♥ Résoudre une équation avec des fractions rationnelles □ ok

1.3 Inéquations

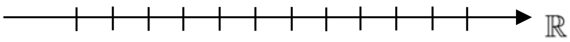
1.3.1 Rappels

Définition

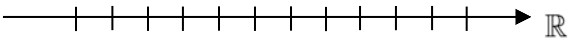
Une **inéquation** est une relation du type <, >, ≤ ou ≥ entre deux expressions mathématiques et contenant un terme inconnu.

Exemples **a)** $x+1\leq 0$ **b)** $x^2\leq 1$ **c)** $x^2>1$

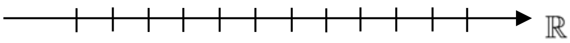
Activité Quelle est la solution des inéquations **a)** , **b)** et **c)** ?

a) 

$S=$

b) 

$S=$

c) 

$S=$

Propriétés des inégalités

Les inégalités vérifient certaines **propriétés**. En voici quelques une qui nous permettrons de résoudre certaines inéquations.

Pour tous réels $a,b\ et\ c$, on a :

- Si $\boldsymbol{a>b}$ alors $\boldsymbol{a+c>b+c}$
- Si $\boldsymbol{a>b}$ alors $\boldsymbol{a-c>b-c}$

Pour tous réels $a\ et\ b$ et pour tout réel c non nul, on a :

- Si $\boldsymbol{c>0}$ et $\boldsymbol{a>b}$ alors $\boldsymbol{ca>cb}$
- Si $\boldsymbol{c>0}$ et $\boldsymbol{a>b}$ alors $\boldsymbol{\frac{a}{c}>\frac{b}{c}}$
- Si $\boldsymbol{c<0}$ et $\boldsymbol{a>b}$ alors $\boldsymbol{ca<cb}$
- Si $\boldsymbol{c<0}$ et $\boldsymbol{a>b}$ alors $\boldsymbol{\frac{a}{c}<\frac{b}{c}}$

Remarque : ces propriétés restent valables pour les inégalités : $<$, $\leq$ ou $\geq$.

Exemples

a) Si $5>3$ alors $5+2>3+2$

b) Si $5>3$ alors $5-2>3-2$

c) Si $c=2>0$ et $8>4$ alors $2\cdot 8>2\cdot 4$ et $\frac{8}{2}>\frac{4}{2}$

d) Si $c=-2<0$ et $8>4$ alors $(-2)\cdot 8<(-2)\cdot 4$ et $\frac{8}{-2}<\frac{4}{-2}$

1.3.2 Inéquations avec des fractions rationnelles

Définition

Une **inéquation rationnelle** est une inéquation qui peut être mise sous la forme suivante :

$$\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0 \qquad \frac{A(x)}{B(x)} \geq 0 \qquad \frac{A(x)}{B(x)} < 0 \qquad ou \qquad \frac{A(x)}{B(x)} > 0$$

$A(x)$ et $B(x)$ sont deux polynômes.

Exemple

On veut résoudre l'inéquation : $x - 1 \geq \frac{5x-1}{x+4}$

a) On commence par déterminer son domaine de définition : $Dom = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

b) On transforme l'inéquation pour la mettre sous la forme : $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$

$$x - 1 \geq \frac{5x-1}{x+4}$$

$$\Leftrightarrow x - 1 - \frac{5x-1}{x+4} \geq 0$$

Il faut choisir le plus petit commun multiple

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+4)-(5x-1)}{x+4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x-3}{x+4} \geq 0$$

(*de la forme* $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$ *; inéquation rationnelle*)

Attention : $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0 \quad \not\Leftrightarrow \quad A(x) \geq 0$

c) On factorise le numérateur et le dénominateur de la fraction rationnelle.

On cherche les zéros du numérateur et du dénominateur de la fraction rationnelle (si ils existent).

$$\frac{x^2-2x-3}{x+4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-3)}{x+4} \geq 0$$

d) On termine en faisant un **tableau des signes** :

x		-4		-1		3	
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{(x+1)(x-3)}{x+4}$	$-$	$\notin \mathbb{R}$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc l'ensemble solution est $\boldsymbol{S =]-4;-1] \cup [3;+\infty[}$.

En résumé

Pour résoudre **une inéquation rationnelle :**

1) On détermine le domaine de définition.

2) on écrit l'inéquation sous la forme : $\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0$; $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$; $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$; $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$

3) On factorise le numérateur et le dénominateur de la fraction rationnelle.

4) On cherche les zéros du numérateur et du dénominateur de la fraction rationnelle.

5) Finalement on résoud le problème à l'aide d'un *tableau des signes*.

Exercice 29

Résoudre les inéquations rationnelles :

1) $\frac{2}{x-1} > \frac{1}{x-2}$ **2)** $\frac{\Psi+1}{\Psi-1} > \frac{\Psi-1}{\Psi+1}$ **3)** $\frac{1}{x} \geq x$

4) $\frac{13}{2-x} \leq 7 - \frac{4}{3x+1}$ **5)** $\frac{12x^2-13x-14}{x-2} < 0$ **6)** $\frac{y}{3y-4} \geq \frac{1}{4}$

7) $x^2 \leq \frac{1}{x}$ **8)** $\frac{1}{x+1} \leq \frac{x}{(x-2)(x+3)}$ **9)** $\frac{6}{4-K} - \frac{1}{1-K} \leq 1$

10) $\frac{x^3-x^2+3x}{x^3+2x^2-x-2} \geq 0$ **11)** $\frac{3x}{x-1} + \frac{1}{2} < 2 - \frac{2}{x-1}$

12) $\frac{1-2x+3x^2}{x^2-1} < 2$ **13)** $\frac{3x+2}{x-5} \leq \frac{6}{x+2} + \frac{39}{x^2-3x-10}$

14) $\frac{6}{x-2} + \frac{4}{x+2} \geq \frac{1}{x-1}$ **15)** $\frac{x^2-3x+2}{x+1} - \frac{2x^2-3x-2}{x-1} > 0$

16) $\frac{x^2+1}{x^2+2x+1} < 0$ **17)** $\frac{x^2+1}{x^3+1} > 0$

Exercice 30 *

Dans une grande ville, la densité de population D (en personnes par km^2) d'un quartier est liée à la distance x qui le sépare du centre de la ville par $D = \frac{5000 \cdot x}{x^2+36}$.

Dans quelles zones de la ville la densité de population excède-t-elle 400 personnes/km^2 ?

1.3.3 Ce qu’il faut absolument savoir

22♥ Maîtriser la notation avec des intervalles □ ok

23♥ Connaître la définition d'une inéquation □ ok

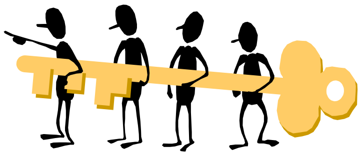
24♥ Connaître les principes d'équivalences pour les inéquations □ ok

25♥ Résoudre une inéquation du premier degré □ ok

26♥ Résoudre une inéquation de degré supérieur ou égal à 2 avec un tableau des signes □ ok

27♥ Résoudre une inéquation avec des fractions rationnelles □ ok

1.4 Solutions des exercices



Ex 1

1) $5x^2-2x\ +\ 5$ $\quad deg(P)=2 \quad Coeff:\ c_2=5\ ,\ c_1\ =-2\ ,\ c_0=5$

2) $32t^2+2$ $\quad deg(P)=2 \quad Coeff:\ c_2=32\ ,\ c_1=0\ ,\ c_0=2$

3) $16x$ $\quad deg(P)=1 \quad Coeff:\ c_1=16\ ,\ c_0=0$

4) $-x^2+2x+1$ $\quad deg(P)=2 \quad Coeff:\ c_2=-1\ ,\ c_1=2\ ,\ c_0=1$

5) $3x^2-2x-1$ $\quad deg(P)=2 \quad Coeff:\ c_2=3\ ,\ c_1=-2\ ,\ c_0=-1$

6) $2x^2+2a^2$ $\quad deg(P)=2 \quad Coeff:\ c_2=2\ ,\ c_1=0\ ,\ c_0=2a^2$

7) $x^3-3ax^2+3a^2x-a^3$ $\quad deg(P)=3 \quad Coeff:\ c_3=1\ ,\ c_2=-3a\ ,\ c_1=3a^2\ ,\ c_0=-a^3$

8) $x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$ $\quad deg(P)=3 \quad Coeff:\ c_3=1\ ,\ c_2=3a\ ,\ c_1=3a^2\ ,\ c_0=a^3$

9) $6b^2x$ $\quad deg(P)=1 \quad Coeff:\ c_1=6b^2$

Ex 2

1) $deg(P)=3$ $\quad c_3=-1$ **2)** $deg(P)=3$ $\quad c_3=1$

3) $deg(P)=8$ $\quad c_8=-2$ **4)** $deg(P)=2$ $\quad c_2=3$

5) $deg(P)=5$ $\quad c_5=-8$ **6)** $deg(P)=4$ $\quad c_4=-7$

7) $deg(P)=7$ $\quad c_7=4$ **8)** $deg(P)=8$ $\quad c_8=100$

Ex 3

1) $E(x)=-5x^4+3x^3+13x^2+4x-7$ **2)** $F(x)=-2x^6+x^5+10x^4+2x^3-8x^2-3x$

3) $c_3=1$ **4)** $deg\left(C[A+B]\right)=\ 5$

5) $deg\left(A^5\right)=5\cdot deg\left(A\right)=20$ **6)** $c_4=9$

7) $deg\left(A+B+C\right)=\ 3$ **8)** $deg\left(A\cdot B\cdot C\cdot D\right)=\ 13$

9) $J(x)=x^2\cdot D(x)=x^5+3x^4+3x^3+x^2$. **10)** $deg\left(6B\right)=deg\left(B\right)=\ 4$

11) Par exemple : $S(x)=\ x^5\ +\ x^3\ \ ;\ \ T(x)=-x^5$. **12)** Impossible.

13) Par exemple : $M(x)=x^3+3\ \ ;\ \ N(x)=-x^3$

14) $P(x)=\sqrt{3x}+x+1$ n'est pas un polynôme car : $\sqrt{3x}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{x}=\sqrt{3}\cdot x^{\frac{1}{2}}$ n'est pas un monôme.

15) $Q(x)=\dfrac{3x^7+5x-4}{x}=3x^6+5-\dfrac{4}{x}$ n'est pas un polynôme car : $-\dfrac{4}{x}=-4x^{-1}$ n'est pas un monôme.

16) $P(x)=1000=1000x^0$ est un monôme de degré 0 ; c'est un polynôme constant.

Ex 4

1) $12t^2-t+4$ **2)** $-8t^2+t-2$ **3)** $\dfrac{12}{7}t^5+5t^3+2$

4) $-6t^4+\dfrac{1}{2}t^3-5t^2+\dfrac{1}{4}t-1$ **5)** $-2t^2-1$

Ex 5

a) et b)

1) $2x^3+x+2=\left(x^2+x-1\right)\left(2x-2\right)+5x$

2) $x^3-10x^2+25x=\left(x-5\right)\left(x^2-5x\right)+0$

3) $x^4+2x^3-2x^2+2x-3=\left(x^2+1\right)\left(x^2+2x-3\right)+0$

4) $x^4-3x^3-11x^2+8x+15=\left(x^3+2x^2-x+3\right)\cdot\left(x-5\right)+30$

5) $x^3-a^3=\left(x-a\right)\left(x^2+ax+a^2\right)+0$

6) $x^3+a^3=\left(x+a\right)\left(x^2-ax+a^2\right)+0$

c) et d) Rappel : Si $R(x)=0$ alors $A(x)$ est divisible par $B(x)$ et le polynôme $A(x)$ a été (partiellement) factorisé.
C'est le cas au point : 2) , 3) 5) et 6)

e) $0\le deg\left(R\right)<deg\left(B\right)$

Ex 6

1) Division euclidienne : $\underbrace{P\left(x\right)}_{A(x)}=\underbrace{\left(x^2+3\right)}_{B(x)}\underbrace{\left(5x^3-x+1\right)}_{Q(x)}+\underbrace{\left(2x-3\right)}_{R(x)}=5x^5+14x^3+x^2-x$

2) Division euclidienne : $\underbrace{2x^3+3x^2-13x-7}_{A(x)}=\underbrace{\left(x^2+x-7\right)}_{B(x)}\cdot\underbrace{\left(2x+1\right)}_{Q(x)}+\underbrace{0}_{R(x)}$

On a $R\left(x\right)=0$ donc x^2+x-7 est un diviseur du polynôme $2x^3+3x^2-13x-7$.

Ex 7 *

a) **1)** $A(x)=x^2-1=\left(x-1\right)\left(x+1\right)+0$

2) $A(x)=x^3-1=\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)+0$

3) $A(x)=x^4-1=\left(x-1\right)\left(x^3+x^2+x+1\right)+0$

4) $A(x)=x^n-1=\left(x-1\right)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x^3+x^2+x+1\right)+0$ avec $n\ge 1$

b) $1+x+x^2+x^3+.......+x^n=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$

c) $2^{51}-1\cong 2{,}25\cdot 10^{15}$

d) $\dfrac{3^{41}-1}{2}\cong 1{,}82\cdot 10^{19}$

e) Nombre de grain de riz sur l'échiquier : $2^{64}-1\cong 1{,}84\cdot 10^{19}$

Ordre de grandeur de masse de riz correspondant au nombre de grains sur l'échiquier en gramme : $1{,}104\cdot 10^{18}\ g$.

Ordre de grandeur de masse de riz correspondant au nombre de grains sur l'échiquier en Kg : $1{,}104\cdot 10^{15}\ Kg$
Que faut-il penser de la promesse du roi Shiram ? Le roi Shiram n'est pas très **sage** !

Ex 8 *

1) $P(x)=4x^4-3x^3+2x-1=\left(x-2\right)\underbrace{\left(4x^3+5x^2+10x+22\right)}_{Q(x)}+\underbrace{43}_{R(x)}$

2) $P(x)=7x^4-3x^3+5x-1=\left(x-3\right)\underbrace{\left(7x^3+18x^2+54x+167\right)}_{Q(x)}+\underbrace{500}_{R(x)}$

3) $P(x)=x^6-1=\left(x-1\right)\underbrace{\left(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\right)}_{Q(x)}+\underbrace{0}_{R(x)}$

4) $P(x)=x^5-a^5=\left(x-a\right)\underbrace{\left(x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4\right)}_{Q(x)}+\underbrace{0}_{R(x)}$

Ex 9

1) *Vrai*	**2)** *Faux*	**3)** *Vrai*	**4)** *Vrai*	**5)** *Faux*
6) *Faux*	**7)** *Faux*	**8)** *Faux*	**9)** *Vrai*	**10)** *Faux*

Ex 10

a) 1) $6x^2-x-2=6\left(x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)=6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)=(2x+1)(3x-2)$

2) $9x^2-9x-10=9\left(x-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)\left(x-\frac{5}{3}\right)=9\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{5}{3}\right)=(3x+2)(3x-5)$

3) $9x^2-24x+16=9\left(x-\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)=(3x-4)^2$

4) $x^2-2\sqrt{3}x+3=1\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)=\left(x-\sqrt{3}\right)^2$

5) $2x^2+2x-2=2\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)=2\left(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

6) x^2+x+1 Pas factorisable

b) $x^2+a^2=\underbrace{1}_{a}x^2+\underbrace{0}_{b}x+\underbrace{a^2}_{c}$ *et* $\Delta=b^2-4ac=0^2-4\cdot1\cdot a^2=-4a^2<0$

donc x^2+a^2 avec $a\neq0$ n'est pas factorisable.

Ex 11

1) $S=\{-3;3\}$	**2)** $S=\left\{-\frac{1}{5};0\right\}$	**3)** $S=\{-9;9\}$	**4)** $S=\varnothing$
5) $S=\left\{-\frac{5}{11};\frac{5}{11}\right\}$	**6)** $S=\left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$	**7)** $S=\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$	**8)** $S=\{-3;7\}$
9) $S=\{1;13\}$	**10)** $S=\{-5;4\}$	**11)** $S=\{1\}$	**12)** $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$
13) $S=\left\{\frac{1}{3};5\right\}$	**14)** $S=\{-3;0;7\}$	**15)** $S=\{-2;0;12\}$	**16)** $S=\{0;1;13\}$
17) $S=\{-4;-3;0\}$	**18)** $S=\left\{-\frac{3}{2};0;2\right\}$	**19)** $S=\{-1\}$	**20)** $S=\{2\}$
21) $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$	**22)** $S=\{-8\}$	**23)** $S=\{3\}$	**24)** $S=\{1\}$
25) $S=\{4\}$	**26)** $S=\{1\}$	**27)** $S=\left\{-1;-\frac{1}{2};1\right\}$	**28)** $S=\{-2\}$
29) $S=\{-3\}$	**30)** $S=\{0;1\}$	**31)** $S=\{4\}$	**32)** $S=\{-5;2\}$

Ex 12

1) $P(2)=0$	**2)** $P(x)=(x-2)(x^2-9)+0$	**3)** $S=\{-3;2;3\}$
4) i) $P(3)=0$	**ii)** $P(x)=(x-3)(x^2+x-6)+0$	**iii)** $S=\{-3;2;3\}$
5) i) $P(-3)=0$	**ii)** $P(x)=(x+3)(x^2-5x+6)+0$	**iii)** $S=\{-3;2;3\}$

Ex 13

1) $3\cdot(x+5)\cdot\underbrace{(x^2+4)}_{\Delta<0}=0$ $\quad S=\{-5\}$

2) $2t\cdot(t+1)\cdot(t-\sqrt{7})\cdot(t+\sqrt{7})=0$ $\quad S=\{-\sqrt{7};-1;0;\sqrt{7}\}$

3) $3\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot\underbrace{(x^2+1)}_{\Delta<0}=0$ $\quad S=\{-2;-1\}$

4) $(x-1)\cdot(3x-1)\cdot(4x+1)=0$ $\quad S=\left\{-\frac{1}{4};\frac{1}{3};1\right\}$

5) $3z^2\cdot(z-1)\cdot\underbrace{(z^2+z+1)}_{\Delta<0}=0$ $\quad S=\{0;1\}$

6) $2\cdot(v+2)^3=0$ $\quad S=\{-2\}$

7) $(3m+1)\cdot(m-1)\cdot(m-\sqrt{2})\cdot(m+\sqrt{5})=0$ $\quad S=\left\{-\sqrt{5};-\frac{1}{3};1;\sqrt{2}\right\}$

8) $3(x-1)(x+1)\underbrace{(x^2+1)}_{\Delta<0}=0$ $\quad S=\{-1;1\}$

9) $(k-1)\cdot\left(k-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(k-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)=0$ $\quad S=\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2};1\right\}$

Ex 14

a) Vrai. Théorème 1 : $P\left(-\frac{3}{4}\right)=0 \Leftrightarrow P(x)=\left(x+\frac{3}{4}\right)\cdot Q(x)$

b) Faux. Théorème 1 : $P(2008)\neq 0 \Leftrightarrow P(x)\neq(x-2008)\cdot Q(x)$

c) Soit $P(27)=0$ 27 est une racine de *P*.

d) 1) Vrai 2) Faux 3) Faux

e) Par exemple : $P(x)=(x-3)\cdot(x-4)\cdot(x+6)\cdot\underbrace{(x^2+1)}_{\Delta<0}$

Ex 15 *

1) $(5x-1)\cdot(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0$ $\quad S=\left\{-\sqrt{3};\frac{1}{5};\sqrt{3}\right\}$

2) $2\cdot(4x+1)\cdot\underbrace{(x^2+3)}_{\Delta<0}=0$ $\quad S=\left\{-\frac{1}{4}\right\}$

3) $x\cdot(3x-1)\cdot(3x+2)\cdot(5x+1)=0$ $\quad S=\left\{-\frac{2}{3};-\frac{1}{5};0;\frac{1}{3}\right\}$

4) $(3x-1)\cdot(2x+3)\cdot\underbrace{(x^2+1)}_{\Delta<0}=0$ $\quad S=\left\{-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right\}$

5) $t^2\cdot(t-30)\cdot(t+20)=0$ $\quad S=\{-20;0;30\}$

6) $(x-1)\cdot(x-100)\cdot(x-\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{2})=0$ $\quad S=\{-\sqrt{2};1;\sqrt{2};100\}$

7) $(3s+2)(2s+1)(s-3)(2s-3)=0$ $\quad S=\left\{-\frac{2}{3};-\frac{1}{2};\frac{3}{2};3\right\}$

8) $2x^2\underbrace{(x^2+1)}_{\Delta<0}\underbrace{(x^2+2)}_{\Delta<0}=0$ $\quad S=\{0\}$

Ex 16* **1)** $k_1=3$ *et* $k_2=5$ **2)** $k_1=1$ *et* $k_2=3$

Ex 17* **1)** Vrai **2)** Faux

Ex 18* **1)** $a=3$ *et* $b=\frac{13}{2}$ **2)** Il y a une infinité de solutions. Par exemple : $a=3$ *et* $b=8$

Ex 19

a) 1) $P(x)= x+1$ Oui, voir théorème fondamental de l'algèbre.

2) $P(x) = x^2-4=(x-2)(x+2)$ Oui, voir théorème fondamental de l'algèbre.

3) $P(x)=x^3-x^2+x=x\underbrace{(x^2-x+1)}_{\Delta<0}$ Oui, voir théorème fondamental de l'algèbre.

4) $P(x)=3x^3-12x^2-63x= \ 3x\cdot\underbrace{(x^2-4x-21)}_{\Delta>0}=3x(x+3)(x-7)$

Non, voir théorème fondamental de l'algèbre.

5) $P(x)=x^3+x^2-26x+24=\underbrace{(x^2+5x-6)}_{\Delta>0}(x-4)=(x+6)(x-1)(x-4)$

Non, voir théorème fondamental de l'algèbre.

6) P(x) = $x^4+3x^2+2=\underbrace{(x^2+1)}_{\Delta<0}\underbrace{(x^2+2)}_{\Delta<0}$ Oui, voir théorème fondamental de l'algèbre.

b) 1) $deg(P)=1 \ ; \ S=\{-1\}$ **2)** $deg(P)=2 \ ; \ S=\{-2;2\}$ **3)** $deg(P)=3 \ ; \ S=\{0\}$

4) $deg(P)=3 \ ; \ S=\{-3;0;7\}$ **5)** $deg(P)=3 \ ; \ S=\{-6;1;4\}$ **6)** $deg(P)=4 \ ; \ S=\varnothing$

Ex 20

1) $P(x)=(2x+4)(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(2x-2)$ est de degré *5*.

Il possède trois racines distinctes : *–2* est une racine de multiplicité *2*, *1/2* est de multiplicité *1* et *1* de multiplicité *2*.

2) $Q(x)=-3(x+3)(x+3)(x+3)(x-3)$ est de degré *4*.

Il possède deux racines distinctes *: –3* est une racine de multiplicité *3*, *3* est de multiplicité *1*.

3) $R(x)=(x-1)^2(x-2)^2$ est de degré *4*.

Il possède deux racines distinctes *: 1* est une racine de multiplicité *2* et *2* est de multiplicité *2*.

4) Le polynôme $S(x)=(x^2-2)(x^2+2)=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\underbrace{(x^2+2)}_{\Delta<0}$ est de degré *4*.

Il possède deux racines distinctes : $-\sqrt{2}$ est une racine de multiplicité *1* et $\sqrt{2}$ est de multiplicité *1*.

5) $T(x)=\underbrace{(x^2+2)}_{\Delta<0}\underbrace{(x^2+4)}_{\Delta<0}$ est de degré *4* et ne possède aucune racine.

6) $U(x)=(x^2+2)+(x^2-4)=2x^2-2=2(x-1)(x+1)$ est de degré *2*.

Il possède deux racines distinctes *: –1* est une racine de multiplicité *1*et *1* est de multiplicité *1*.

7) $V(x)=3(x-7)^4(x-2)^6(x^2-2x+1)=3(x-7)^4(x-2)^6(x-1)^2$ est de degré 1*2*.

Il possède trois racines distinctes *: 1* est une racine de multiplicité *2*, *2* est une racine de multiplicité *6* et *7* est une racine de multiplicité *4*.

8) $W(x)=(x^2+1)(x^2+2)(x^2+2x+1)^2=\underbrace{(x^2+1)}_{\Delta<0}\underbrace{(x^2+2)}_{\Delta<0}(x+1)^4$ est de degré 8.

Il possède une racine distincte *:–1* est une racine de multiplicité *4*.

Ex 21

1) Par exemple : $P(x)=3(x+3)(x-2)$ **2)** Par exemple : $P(x)=6x(x+2)(x-12)$

3) Par exemple : $P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\cdot\ldots\ldots\cdot(x-98)(x-99)(x-100)$

4) $P(x)=5(x-1)(x-2)$ **5)** $P(x)=4(x+3)(x-1)(x-2)$

6) Par exemple : $P(x)=(x+3)^2(x-1)^2$ **7)** Par exemple : $P(x)=(x-3)^3(x^2+b) \quad b\in\mathbb{R}_+^*$

8) $P(x)=\frac{1}{2}(x+6)(x+2)$ **9)** $P(x)=-\frac{2}{7}(x+6)(x+2)\left(x-\frac{3}{4}\right)$

Ex 22 **1)** *Faux* **2)** *Vrai* **3)** *Faux* **4)** *Faux*

5) *Faux* **6)** *Vrai* **7)** *Faux* **8)** *Faux*

Ex 23

1) $\frac{x-3}{x+3}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}$ **2)** $\frac{x+4}{x-1}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\{1;4\}$ **3)** $\frac{4(x+3)}{x-5}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\{1;5\}$

4) $\frac{6-x}{x+9}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\{-9;3\}$ **5)** $\frac{3(x-4)}{2(x-3)}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\{3\}$ **6)** $\frac{u(u+2)}{u-3}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\{-2;3\}$

7) $\frac{t^2+1}{t}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\}$ **8)** $\frac{2(x+2)}{x-5}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\{1;5\}$ **9)** $\frac{y(y+1)}{(y-3)}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\{-2;3\}$

10) $\frac{5x-2}{x-2}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{4};2\right\}$ **11)** $\frac{2t-3}{t+3}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\left\{-3;\frac{1}{5}\right\}$ **12)** $\frac{(x-2)(x-4)}{(x-3)(x-1)}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\{1;2;3\}$

13) $\frac{z+4}{z-1/2}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\{-4;1/2\}$ **14)** $\frac{p^2+2p+4}{p+2}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$ **15)** $\frac{y(y+6)}{(y-3)}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\{-1;3\}$

16) $\frac{x^2+x+1}{x^2-2x+1}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ **17)** $\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$ $Dom=\mathbb{R}$ **18)** $\frac{(x+1)(x^2+1)}{(x^2+x+1)}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Ex 24

1) $-\frac{1}{x}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\{-2;0;2\}$ **2)** y^2 $Dom=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

3) $\frac{a^2-5}{4a-1}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{4};0;\frac{1}{4}\right\}$ **4)** $\frac{2(5x+1)}{x+1}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\left\{-1;0;\frac{1}{5};1\right\}$

5) $\frac{a-2}{8a}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\{-2;0\}$ **6)** $-x^2(3x-1)$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3};0;1\right\}$

7) $\frac{a-1}{a-3}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\{-5;-2;3\}$ **8)** $\frac{6x}{(x-1)(x-2)(x+1)}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\{-1;1;2\}$

9) $\frac{2x}{2x-1}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$ **10)** $\frac{5}{2z-1}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$

11) $\frac{20}{(a^2+6)(a^2+4)}$ $Dom=\mathbb{R}$ **12)** $\frac{-24x}{(2+3x)(2-3x)}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right\}$

13) $\frac{-2}{z(z+2)}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\{-2;0\}$ **14)** $\frac{1}{2(t-5)}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\{-5;5\}$

15) $\frac{x+2}{x}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ **16)** $\frac{x+2}{x-2}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\{-2;0;2\}$

17) $\frac{t-3}{t(1-t)}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ **18)** $\frac{4}{x+2}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$

19) $-\frac{1}{x}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\}$ **20)** $\frac{2x(x+2)}{(x+1)(x+3)}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\{-3;-1;2\}$

21) $\frac{11(x+1)}{x(x+3)}$ $Dom=\mathbb{R}\setminus\{-3;0;1\}$

Ex 25 *

1) $\frac{x+1}{x}=\frac{1x+1}{1x+0}$ **2)** $\frac{2x+1}{x+1}$ **3)** $\frac{3x+2}{2x+1}$

4) $\frac{5x+3}{3x+2}$ **5)** $\frac{8x+5}{5x+3}$ **6)** 6 barres de fractions $\rightarrow \frac{13x+8}{8x+5}$

7 barres de fractions $\rightarrow \frac{21x+13}{13x+8}$

Ex 26 *

1.i) $a=\frac{3}{2}$ et $b=-\frac{1}{2}$ $\qquad \frac{x+2}{(x-1)(x+1)}=\frac{3}{2(x-1)}+\frac{-1}{2(x+1)}$

1.ii) $a=1$ et $b=1$ $\qquad \frac{2x+1}{(x-2)\cdot(x+3)}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+3}$

1.iii) $a=\frac{5}{8}$ et $b=\frac{3}{8}$ $\qquad \frac{x+1}{(x-4)(x+4)}=\frac{5}{8(x-4)}+\frac{3}{8(x+4)}$

2.i) $a=3$ et $b=-2$ $\qquad \frac{x+4}{x^2+3x+2}=\frac{3}{x+1}+\frac{-2}{x+2}$

2.ii) $a=-3$ et $b=1$ $\qquad \frac{-2x-9}{x^2-5x-6}=\frac{-3}{x-6}+\frac{1}{x+1}$

2.iii) $a=\frac{10}{7}$ et $b=-\frac{3}{7}$ $\qquad \frac{x+4}{x^2-5x-6}=\frac{10}{7(x-6)}-\frac{3}{7(x+1)}$

Ex 27

1) $Dom=\mathbb{R}\setminus\{5\}$ $\quad S=\left\{\frac{11}{2}\right\}$

2) $Dom=\mathbb{R}\setminus\{5\}$ $\quad S=\varnothing$

3) $Dom=\mathbb{R}\setminus\{5\}$ $\quad S=\{3\}$

4) $Dom=\mathbb{R}\setminus\{5\}$ $\quad S=\{6\}$

5) $Dom=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ $\quad S=\{3\}$

6) $Dom=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ $\quad S=\{-3;0\}$

7) $Dom=\mathbb{R}\setminus\{-2;0\}$ $\quad S=\left\{-\frac{3}{4};3\right\}$

8) $Dom=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ $\quad S=\{0;5\}$

9) $Dom=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ $\quad S=\{0\}$

10) $Dom=\mathbb{R}\setminus\left\{-1;-\frac{1}{2};4\right\}$ $\quad S=\{-5\}$

11) $Dom=\mathbb{R}\setminus\{1;3\}$ $\quad S=\left\{\frac{29}{7}\right\}$

12) $Dom=\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\}$ $\quad S=\varnothing$

13) $Dom=\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\}$ $\quad S=\varnothing$

14) $Dom=\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ $\quad S=\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

15) $Dom=\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$ $\quad S=\{-3\}$

16) $Dom=\mathbb{R}\setminus\left\{-3;-\frac{1}{2};2\right\}$ $\quad S=\{0;7\}$

17) $Dom=\mathbb{R}\setminus\{-5;5\}$ $\quad S=\left\{-4-\sqrt{29};-4+\sqrt{29}\right\}$

18) $Dom=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ $\quad S=\varnothing$

Ex 28

1) $x_0=x_1-v\cdot(t_1-t_0)$ $\qquad t_1=\frac{x_1-x_0+v\cdot t_0}{v}$

2) $p_2=\frac{p_1\cdot v_1\cdot T_2}{v_2\cdot T_1}$ $\qquad T_2=\frac{p_2\cdot v_2\cdot T_1}{p_1\cdot v_1}$

3) $p'=\frac{f\cdot p}{p-f}$ $\qquad f=\frac{p\cdot p'}{p'+p}$

4) $R_2=\frac{f\cdot R_1(n-1)}{f\cdot(n-1)-R_1}$ $\qquad f=\frac{R_1\cdot R_2}{(n-1)(R_2-R_1)}$

5) $R_2=\frac{R\cdot R_1}{R_1-R}$

6) $R_3=\frac{R\cdot R_1\cdot R_2}{R_1\cdot R_2-R\cdot R_2-R\cdot R_1}$

Ex 29

1) $Dom = \mathbb{R} \setminus \{1;2\}$ $\quad S =]1\,;2[\, \cup \,]3\,;+\infty[$

2) $Dom = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ $\quad S =]-1\,;0[\, \cup \,]1\,;+\infty[$

3) $Dom = \mathbb{R}^*$ $\quad S =]-\infty;-1] \cup]0;1]$

4) $Dom = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3};2\right\}$ $\quad S = \left]-\infty\,;-\frac{1}{3}\right[\cup \,]2\,;+\infty[$

5) $Dom = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ $\quad S = \left]-\infty\,;-\frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{7}{4}\,;2\right[$

6) $Dom = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4}{3}\right\}$ $\quad S =]-\infty\,;-4] \cup \left]\frac{4}{3}\,;+\infty\right[$

7) $Dom = \mathbb{R}^*$ $\quad S =]0\,;1]$

8) $Dom = \mathbb{R} \setminus \{-3;-1;2\}$ $\quad S =]-3\,;-1[\, \cup \,]2\,;+\infty[$

9) $Dom = \mathbb{R} \setminus \{1;4\}$ $\quad S =]-\infty\,;1[\, \cup \,]4\,;+\infty[$

10) $Dom = \mathbb{R} \setminus \{-2;-1;1\}$ $\quad S =]-\infty\,;-2[\, \cup \,]-1\,;0] \cup \,]1\,;+\infty[$

11) $Dom = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $\quad S = \left]-\frac{7}{3};1\right[$

12) $Dom = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ $\quad S =]-1;1[$

13) $Dom = \mathbb{R} \setminus \{-2;5\}$ $\quad S = \left]-2;-\frac{5}{3}\right] \cup [1;5[$

14) $Dom = \mathbb{R} \setminus \{-2;1;2\}$ $\quad S =]-2;0] \cup \left[\frac{2}{3};1\right[\cup \,]2;+\infty[$

15) $Dom = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ $\quad S =]-\infty;-5[\, \cup \,]-1;0[\, \cup \,]1;2[$

16) $Dom = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $\quad S = \varnothing$

17) $Dom = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $\quad S =]-1;+\infty[$

Ex 30 * La densité excède 400 personnes/km^2 dans une couronne entre les rayons 4,5 et 8.

Notes personnelles

Notes personnelles