Des origines de l'algèbre à la naissance des nombres complexes

C'est au mathématicien perse Mohammad Ibn Moussa al Khwarizmi (780 – 850) que l'on doit la naissance de l'algèbre. A cette époque, la numération était différente de celle que l'on utilise de nos jours, et le calcul littéral n'existait pas encore. En 833, al Khwarizmi dédie au Calife de Bagdad, al Ma'moun, un traité qui contient ses propres méthodes pour la résolution de problèmes et qui s'intitule « livre abrégé sur le calcul par la restauration (al jabr) et la comparaison (al mugabala) ». Dans ce traité, les équations ainsi que les méthodes pour les résoudre étaient présentées sous la forme de phrases. Le « bien » désigne l'inconnue de l'équation, la « racine », la racine carrée de l'inconnue et les « nombres » les coefficients de nos équations modernes. En ces termes, al Khwarizmi présente les méthodes pour la résolution de 6 équations types, que l'on écrit de nos jours par :

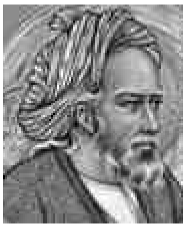
$ax = b\sqrt{x}$ $\quad$ $ax = c$ $\quad$ $b\sqrt{x} = c$

$ax + b\sqrt{x} = c$ $\quad$ $ax + c = b\sqrt{x}$ $\quad$ $b\sqrt{x} + c = ax$

Ces méthodes décrites par al Khwarizmi , même sans utiliser de notations littérales, sont similaires à celles que l'on peut mettre en place à notre époque. Par exemple, lors de la résolution de l'équation $0,5x + 5\sqrt{x} = 28$, il fait référence au calcul d'un discriminant qui doit être positif : « tu dois savoir, qu'en prenant la moitié des racines dans sa forme d'équation et que tu multiplies cette moitié par elle-même ; si ce que tu obtiens par cette multiplication est inférieur aux unités susnommées qui accompagnent le bien, tu auras une équation ». A partir du Xe siècle, ces méthodes seront reconnues par la communauté scientifique et diffusées assez largement dans le monde arabe.

Au cours des siècles qui suivent, l'univers des équations résolues s'agrandit :

Al Mahani (IXe) : $x^3 + c = ax^2$;
Al Kouhi (Xe) : $x + y = 10$, $x^2 + y^2 + x/y = 72$, $x^3 + (13 + ½)x + 5 = 10x^2$;
Abou I-joud (Xe) : $x^3 + 1 = 3x$;
Ibn al Haytham (XIe) : $x + y = 10$; $x = y^3$; $x^3 + 301x = 1000 + 30x^2$;
Al Biruni (XIe) : $x^3 = 3x + 1$.



C'est le poète et scientifique Omar al Khayyam (1038 ou 1048 – 1132) qui publie dans son « traité d'algèbre » une classification algébrique de 25 équations de degré inférieur ou égal à 3, et qui, pour la première fois dans l'histoire propose une théorie géométrique des équations de degré 3. En fait, parmi ces 25 équations on retrouve les 6 étudiées par al Khwarizmi et 5 équations qui, par changement de variable, se ramènent à ces 6 équations. La résolution des 14 équations restantes représente une avancée considérable. Voici le classement de ces équations :

1- Simples :
$$x = a \,;\ x^2 = a \,;\ x^2 = ax \,;\ x^3 = ax^2 \,;\ x^3 = ax \,;\ x^3 = a.$$
2- Trinômes :
$$x^2 + ax = b \,;\ x^2 + b = ax \,;\ ax + b = x^2 \,;\ x^3 + ax^2 = bx \,;\ x^3 + bx = x^2 \,;\ ax^2 + bx = x^3 \,;$$
$$x^3 + ax = b \,;\ x^3 + c = ax \,;\ b + ax = x^3 \,;\ x^3 + ax^2 = b \,;\ x^3 + c = ax^2 \,;\ b + ax^2 = x^3.$$
3- Quadrinômes :
$$x^3 + ax^2 + bx = c \,;\ x^3 + ax^2 + c = bx \,;\ x^3 + bx + c = ax^2 \,;\ c + bx + ax^2 = x^3 \,;$$
$$x^3 + ax^2 = bx + c \,;\ x^3 + bx = ax^2 + c \,;\ x^3 + c = ax^2 + bx.$$

Dans d'autres de ses travaux, ne pouvant pas trouver de méthodes algébriques pour résoudre des équations plus compliquées, Omar al Khayyam propose également des méthodes analytiques qui en donnent les solutions approchées. Il précise qu'il « est possible d'augmenter la précision jusqu'à ce que l'erreur soit imperceptible »… Bien que la contribution d'Omar al Khayyam au développement des mathématiques, et en particulier de l'algèbre, soit importante, ses idées ne semblent pas avoir beaucoup circulé hors des frontières de la Perse. Et pourtant, elles reviennent sur le devant de la scène lors de la renaissance italienne…

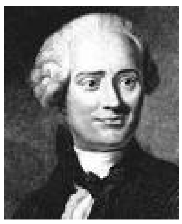
Pendant ce temps, l'Europe est fortement à la traîne. On retrouve simplement les œuvres d'Omar al Khayyam dans « l'ars Magna » de Cardan, publié en 1545. Cependant, l'algèbre en Italie a le mérite d'apporter, même très lentement, de nouvelles notations littérales, plus efficaces que ces longues phrases employées par les algébristes arabes, et met en place l'utilisation systématique de la numération arabe (numération actuelle, d'origine indienne).
Au début du XVIè siècle, Scipione del Ferro (1465 – 1526), professeur à l'université de Bologne, trouve les formules qui donnent les solutions de l'équation $x^3 + px = q$:

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}}-\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}}\ .$$

Les mathématiciens Gérolamo Cardano (1501 – 1576) et Nicolò Tartaglia (1500 – 1557) travaillent sur ces équations et sur les formules de Del Ferro. Ils trouvent quelque chose que Cardan qualifie de « tanto sottile quanto inutile ». L'équation $x^3 - 15x = 4$ admet 4 comme racine évidente. En appliquant les formules de Del Ferro, on obtient $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Comment 4 peut-il être obtenu à partir de racines carrées de nombres négatifs, monstruosités algébriques ? (nombres alors qualifiés de nombres impossibles.)

Il faut attendre quelques années et l'intervention de l'algébriste Raffaele Bombelli (1526? – 1573) pour apporter un élément de réponse ; il est le premier à oser utiliser cette écriture impossible et il montre que $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ et $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ peuvent s'écrire comme $2 + \sqrt{-1}$ et $2 - \sqrt{-1}$ et que $2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$. Il propose alors que tous les calculs avec ces racines étaient réalisables, même s'il n'était pas possible de comprendre algébriquement ce que cela signifiait dans le cas des racines carrées de nombres négatifs. A l'époque de Cardan, on écrivait 2p:℞ :m1 pour $2 + \sqrt{-1}$, et 1Zp.5Rm.4 pour $x^2 + 5x - 4$.

Cette extension du champ numérique n'a bien sûr été admise que progressivement, et il ne pouvait en être autrement puisqu'à l'époque les nombres négatifs eux-mêmes n'avaient pas acquis droit de cité, ce qui conduisait les algébristes à considérer différents cas là où nous ne voyons qu'une seule équation. Sous la plume de Leibniz (Allemagne, 1646 – 1716), pourtant innovateur et utilisateur des nombres complexes, nous lisons un siècle plus tard : « Ces expressions ont ceci d'admirable que dans le calcul elles n'enveloppent rien d'absurde ni de contradictoire, et que cependant on ne peut en donner d'exemple dans la nature, c'est-à-dire dans les choses concrètes ». L'histoire fournit divers exemples du cheminement qui part d'un besoin mathématique et, par la mise au point d'un outil, la définition d'une notation, le dégagement d'un concept, parvient à la formalisation d'une nouvelle notion. Le calcul complexe, dont on a constaté l'efficacité avant de pleinement la comprendre, illustre ce cheminement.



La terminologie moderne a reçu en héritage de l'embarras des précurseurs la terminologie des nombres «imaginaires », qui à vrai dire ne sont pas plus imaginaires que les nombres réels ne sont réels. Deux siècles de recherche ont cependant contribué à dissiper le mystère qui entourait encore cette notion : l'exponentielle complexe, entrevue par Leibniz a été étudiée par Euler (Suisse, 1707 – 1783). Citons aussi les travaux de d'Alembert (France, 1717 – 1783) et son théorème fondamental de l'algèbre (qui montre qu'une équation de degré *n* a exactement *n* racines dans les nombres complexes). En ce qui concerne la correspondance entre points du plan et nombres complexes, on peut citer les travaux du Suisse Argand (1768 – 1822) finalisés et pleinement exploités par le Français Cauchy (1789 – 1857) ainsi que ceux sur la forme trigonométrique du jeune Gauss (Allemagne, 1777 – 1855) quand il démontre en1797 que tout polynôme à coefficients complexes a une racine complexe.

Et plein d'autres encore que le manque de place ne me permet pas de citer…