Une petite histoire des équations pour les élèves de 1ère

Même si l'on peut faire remonter l'histoire des mathématiques à l'histoire de l'Humanité dans son ensemble, les premières traces tangibles de la résolution des équations remontent bien sûr à l'apparition de l'écriture, et donc à la Mésopotamie.
Avant d'aborder cette histoire, il faut comprendre que les notations mathématiques, et ce à partir de l'écriture même des chiffres et des nombres, a toujours changé à travers notre Histoire, et que ce que l'on comprend comme équation algébrique, par exemple $3x^2 + 2 = 7$, ne s'est jamais présenté sous une même forme chez les différentes civilisations.

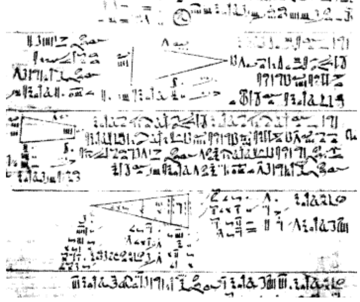
<u>Une première trace chez les Babyloniens</u> :

À part les tablettes de calcul, les textes babyloniens sont constitués de listes de problèmes avec leurs solutions. Lorsqu'on analyse ces problèmes, une grande partie se ramène à des équations simples. Les Babyloniens savaient résoudre beaucoup de problèmes du premier et du second degré. Cependant, nous n'avons jamais trouvé de tablettes contenant des méthodes générales pour résoudre ces équations. Faisaient-elles l'objet d'une transmission orale où ont-elles simplement disparu ?

Voici un exemple : *Tablette n°13 901 du British Museum*
(J'ai transcrit directement les nombres en base 10 ; sur la tablette, ils sont donnés en base 60.
Il est écrit : « 7 fois le côté de mon carré et 11 fois la surface égale 6,25. Quel est le côté ? ». Puis la résolution du problème est écrite en toutes lettres :
tu inscriras 7 et 11
tu croiseras 11 et 6,25 tu trouveras 68,75
tu fractionneras 7 en 2 tu trouveras 3,5
tu croiseras 3,5 tu trouveras 12,25
tu ajouteras 12,25 et 68,75 tu trouveras 81;
c'est le carré de 9;
tu soustrairas les 3,5 que tu as croisés de 9; tu trouveras 5,5
*l'inverse de 11 ne peut être dénoué (*ils ne savaient pas calculer l'inverse de 11…) *que dois-je croiser à 11 qui donne 5,5 ? 0,5*
C'est le côté du carré
La méthode proposée est celle de la résolution de l'équation $11x^2 + 7x = 6{,}25$. Ecrivez à coté du texte ci-dessus les étapes que l'on fait en 1ère, vous serez surpris…
Mais, on trouve également d'autres méthodes pour résoudre d'autres équations similaires. Il y a de fortes chances pour pouvoir en conclure que les Mésopotamiens connaissaient des méthodes, mais ne savaient pas forcément comment elles fonctionnaient… Une autre de ces méthodes, était celle dite de « la fausse position ».

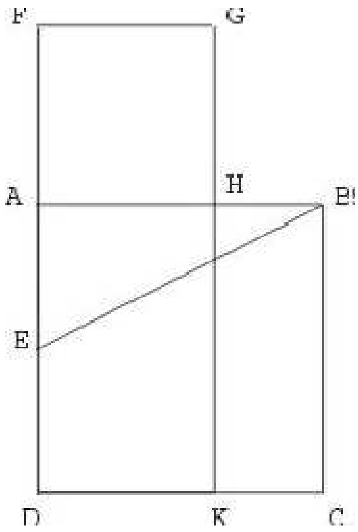
<u>D'autres traces chez les Egyptiens</u> :

On trouve un exemple de cette méthode dans le *Papyrus de Rhind* (1650 avant JC, long rouleau de 5 m conservé lui aussi au *British Museum*) dont l'essentiel des problèmes se ramènent à des équations du premier degré. Par exemple, voici le problème 26 : « *Une quantité et son quart font 15. Quelle est cette quantité ? » La solution présentée est la suivante :*
calcule avec 4 ; prends le quart, 1 ; ensemble 5 ;
calcule avec 5 pour obtenir 15 : 3
enfin est faite la multiplication 4 × 3 = 12
C'est le principe de cette méthode que l'on appelle de « la fausse position ».
Soit la résolution de l'équation : $a \times x = b$.
On part d'une valeur x_0 telle que le calcul de $a \times x_0$ soit facile. Ici $x_0 = 4$



et on ramène le calcul de x à $\frac{b}{a \times x_0} \times x_0$ (en termes modernes).

La Grèce antique :



Les Grecs reprennent l'ensemble des connaissances des Mésopotamiens et des Egyptiens. Mais ils fondent véritablement les mathématiques en se basant sur la preuve : il ne suffit pas d'arriver à un résultat, mais il faut fondamentalement le prouver.

Ils se lancent dans la résolution de nombreuses équations, mais leurs solutions sont souvent basées sur des principes géométriques et ils n'arrivent toujours pas à fonder l'algèbre, à savoir une règle applicable pour toutes les équations d'un même type.

On peut citer un exemple que l'on trouve dans « *Les Eléments* » d'*Euclide* (l'Encyclopédie des mathématiques pendant de nombreux siècles…) *Proposition 11 du livre 2* : « *Couper une droite donnée, de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, soit égal au carré du segment restant.* »

Avec nos notations, cela revient à trouver le nombre x tel que $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$, soit pour $a = 1$, résoudre $x^2 + x - 1 = 0$ qui a pour solution … le nombre d'or !

Les mathématiciens arabes :

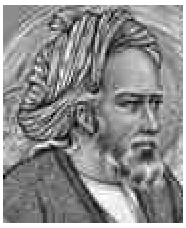
C'est au mathématicien perse Mohammad Ibn Moussa al Khwarizmi (780 – 850) que l'on doit la naissance de l'algèbre. A cette époque, la numération était différente de celle que l'on utilise de nos jours (même si elle commence enfin à s'en rapprocher), et le calcul littéral n'existait pas encore. En 833, al Khwarizmi dédie au Calife de Bagdad, al Ma'moun, un traité qui contient ses propres méthodes pour la résolution de problèmes et qui s'intitule « *livre abrégé sur le calcul par la restauration* (*al jabr*) *et la comparaison* (*al mugabala*) ». « *Al jabr* » a donné le mot algèbre. Dans ce traité, les équations ainsi que les méthodes pour les résoudre étaient présentées sous la forme de phrases. Le « bien » désigne l'inconnue de l'équation, la « racine », la racine carrée de l'inconnue et les « nombres » les coefficients de nos équations modernes.

En ces termes, al Khwarizmi présente les méthodes pour la résolution de 6 équations types, que l'on écrit de nos jours par : ax = b$\sqrt{x}$; ax = c ; b$\sqrt{x}$ = c ; ax + b$\sqrt{x}$ = c ; ax + c = b$\sqrt{x}$; b$\sqrt{x}$ + c = ax.

Ces méthodes décrites par al Khwarizmi , même sans utiliser de notations littérales, sont similaires à celles que l'on peut mettre en place à notre époque. Par exemple, lors de la résolution de l'équation 0,5x + 5$\sqrt{x}$ = 28, il fait référence au calcul d'un discriminant qui doit être positif : « tu dois savoir, qu'en prenant la moitié des racines dans sa forme d'équation et que tu multiplies cette moitié par elle-même ; si ce que tu obtiens par cette multiplication est inférieur aux unités susnommées qui accompagnent le bien, tu auras une équation ». A partir du Xe siècle, ces méthodes seront reconnues par la communauté scientifique et diffusées assez largement dans le monde arabe.

Au cours des siècles qui suivent, l'univers des équations résolues s'agrandit :

Al Mahani (IXe) : $x^3 + c = ax^2$;
Al Kouhi (Xe) : $x + y = 10$, $x^2 + y^2 + x/y = 72$, $x^3 + (13 + ½)x + 5 = 10x^2$;
Abou I-joud (Xe) : $x^3 + 1 = 3x$;
Ibn al Haytham (XIe) : $x + y = 10$; $x = y^3$; $x^3 + 301x = 1000 + 30x^2$;
Al Biruni (XIe) : $x^3 = 3x + 1$.



C'est le poète et scientifique Omar al Khayyam (1038 ou 1048 – 1132) qui publie dans son « traité d'algèbre » une classification algébrique de 25 équations de degré inférieur ou égal à 3, et qui, pour la première fois dans l'histoire propose une théorie géométrique des équations de degré 3. En fait, parmi ces 25 équations on retrouve les 6 étudiées par al Khwarizmi et 5 équations qui, par changement de variable, se ramènent à ces 6 équations. La résolution des 14 équations restantes représente une avancée considérable. Voici le classement de ces équations :

Simples :
$x = a$; $x^2 = a$; $x^2 = ax$; $x^3 = ax^2$; $x^3 = ax$; $x^3 = a$.
Trinômes :
$x^2 + ax = b$; $x^2 + b = ax$; $ax + b = x^2$; $x^3 + ax^2 = bx$; $x^3 + bx = x^2$; $ax^2 + bx = x^3$;
$x^3 + ax = b$; $x^3 + c = ax$; $b + ax = x^3$; $x^3 + ax^2 = b$; $x^3 + c = ax^2$; $b + ax^2 = x^3$.
Quadrinômes :
$x^3 + ax^2 + bx = c$; $x^3 + ax^2 + c = bx$; $x^3 + bx + c = ax^2$; $c + bx + ax^2 = x^3$;
$x^3 + ax^2 = bx + c$; $x^3 + bx = ax^2 + c$; $x^3 + c = ax^2 + bx$.

Dans d'autres de ses travaux, ne pouvant pas trouver de méthodes algébriques pour résoudre des équations plus compliquées, Omar al Khayyam propose également des méthodes analytiques qui en donnent les solutions approchées. Il précise qu'il « est possible d'augmenter la précision jusqu'à ce que l'erreur soit imperceptible »… Bien que la contribution d'Omar al Khayyam au développement des mathématiques, et en particulier de l'algèbre, soit importante, ses idées ne semblent pas avoir beaucoup circulé hors des frontières de la Perse. Et pourtant, elles reviennent sur le devant de la scène lors de la renaissance italienne…

<u>La fin de cette histoire</u> :

En Europe, le développement systématique de ces méthodes se fait au XVe et XVIe siècles. Les mathématiciens italiens parmi lesquels on peut citer Scipione del Ferro (1465 – 1526), Gérolamo Cardano (1501 – 1576) et Nicolò Tartaglia (1500 – 1557), s'attaquent aussi à la résolution des équations du troisième degré. Leurs travaux ont donné naissance à toute une nouvelle branche des mathématiques… Mais vous le découvrirez (pour les 1ères S) l'année prochaine.

C'est Ferrari, l'élève de Cardano qui donna le premier la méthode de résolution des équations de degré 4, en se ramenant aux équations de degré 2 ou 3.

Ajoutons enfin que c'est au jeune mathématicien et républicain (par opposition aux royalistes) Evariste Galois (1811-1832), à l'histoire rocambolesque, que l'on doit le résultat suivant : « *Il n'y a pas de méthode générale (donc pas de formule) pour résoudre une équation de degré supérieur à 5.* » Il aura fallu tout de même plusieurs décennies pour que les mathématiciens du XIXe siècle comprennent ses travaux… et plusieurs millénaires de recherches mathématiques pour y arriver…

Et nous n'avons parlé que de certaines équations…